



# Averaging et commande optimale déterministe

François Chaplais

## ► To cite this version:

François Chaplais. Averaging et commande optimale déterministe. Automatique / Robotique. École Nationale Supérieure des Mines de Paris, 1984. Français. NNT : . pastel-00834003

**HAL Id: pastel-00834003**

**<https://pastel.archives-ouvertes.fr/pastel-00834003>**

Submitted on 13 Jun 2013

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THESE

*présentée à*

L'ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DES MINES DE PARIS

*par*

*François CHAPLAIS*

*en vue de l'obtention*

DU TITRE DE DOCTEUR INGENIEUR

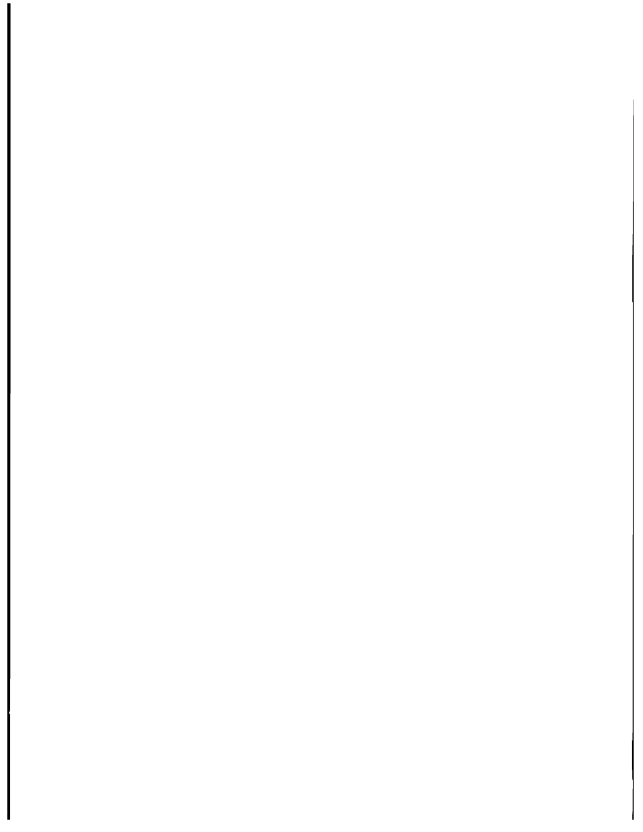
EN

MATHEMATIQUES ET AUTOMATIQUE

AVERAGING ET COMMANDE OPTIMALE DETERMINISTE

*soutenue le 20 Novembre 1984 devant le Jury composé de*

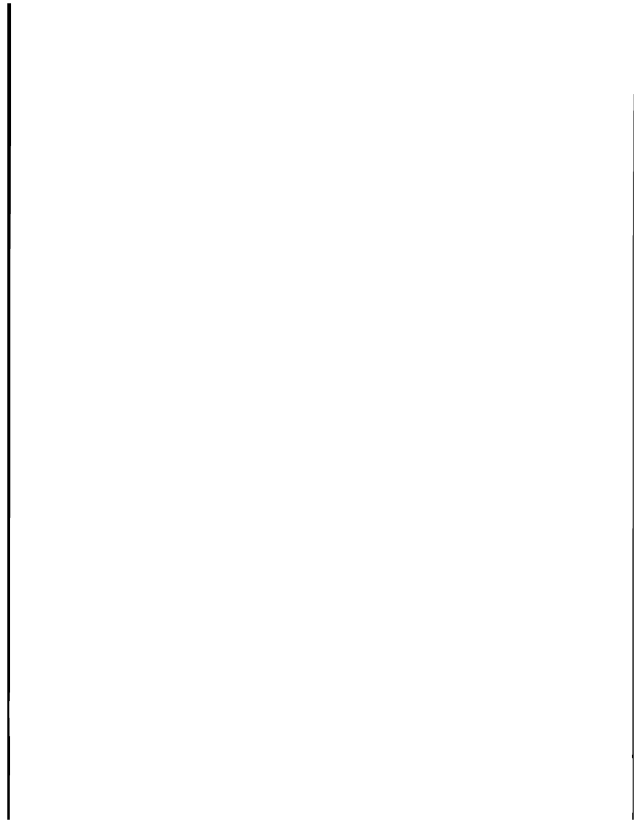
<i>Messieurs</i>	<i>Alain BENSOUSSAN</i>	<i>Président</i>
	<i>Pierre Louis LIONS</i>	<i>Rapporteur</i>
	<i>Guy COHEN</i>	<i>Examineur</i>
	<i>Michel POTTIER</i>	<i>Examineur</i>
	<i>Jean-Pierre QUADRAT</i>	<i>Examineur</i>



**AVERAGING  
ET  
CONTROLE OPTIMAL  
DETERMINISTE**

**P. CHAPLAIS**





## SOMMAIRE

- 0 - INTRODUCTION
  - 0.1 Origine de l'étude
  - 0.2 Objet de l'étude
  - 0.3 Plan
  
- I - PROBLEME MOYENNE (cas périodique)
  - I.1 Introduction
  - I.2 Développement formel de la fonction valeur et problème moyenné
  - I.3 Remarque
  
- II - CAS LINEAIRE QUADRATIQUE
  - 2.1 Introduction
  - 2.2 Etude d'un exemple
    - 2.2.1 Présentation
    - 2.2.2 Développement à priori de la fonction valeur
    - 2.2.3 Développement de la fonction valeur
    - 2.2.4 Doublement d'ordre d'approximation par feedback
    - 2.2.5 Doublement d'ordre d'approximation en boucle ouverte
  - 2.3 Cas général homogène sans contrainte
    - 2.3.1 Présentation
    - 2.3.2 Développement à priori de la fonction valeur
    - 2.3.3 Validité du développement
    - 2.3.4 Doublement d'ordre d'approximation par feedback
    - 2.2.5 Doublement d'ordre d'approximation en boucle ouverte
  
- III - DOUBLEMENT D'ORRE D'APPROXIMATION
  - 3.1 Introduction
  - 3.2 Minoration du coût à l'ordre 2
  - 3.3 Développement du coût engendré par le contrôle optimal du problème moyenné.
  - 3.4 Corollaire: doublement de l'ordre d'approximation
  - 3.5 Comparaison des développements obtenus avec le développement a priori de la fonction valeur.

IV - THEOREME LIMITE SUR LES FONCTIONS VALEURS

4.1 Introduction

4.2 Hypothèses

4.3 Rappels

4.4 Théorème (4.1): convergence uniforme sur tout compact

4.5 Théorème (4.2): convergence uniforme globale

4.7 Corollaire

4.8 Remarque

V - PROBLEME MOYENNE

5.1 Introduction

5.2 Problème moyenné

5.3 Théorème (5.1): Hamiltonien du problème moyenné

5.4 Corollaire

A - ANNEXE

A.1 Théorème principal

A.2 Théorème principal, cas périodique

A.3 Développement d'intégrales au second ordre (cas périodique)

A.4 Développement d'équations différentielles (cas périodique)

BIBLIOGRAPHIE

## INTRODUCTION

100

101

102

103

104

105

106

107

108

109

110

111

112

113

114

115

116

117

118

119

120

121

122

123

124

125

126

127

128

129

130

131

132

133

134

135

136

137

138

139

140

141

142

143

144

145

146

147

148

149

150

151

152

153

154

155

156

157

158

159

160

161

162

163

164

165

166

167

168

169

170

171

172

173

174

175

176

177

178

179

180

181

182

183

184

185

186

187

188

189

190

191

192

193

194

195

196

197

198

199

200

201

202

203

204

205

206

207

208

209

210

211

212

213

214

215

216

217

218

219

220

221

222

223

224

225

226

227

228

229

230

231

232

233

234

235

236

237

238

239

240

241

242

243

244

245

246

247

248

249

250

251

252

253

254

255

256

257

258

259

260

261

262

263

264

265

266

267

268

269

270

271

272

273

274

275

276

277

278

279

280

281

282

283

284

285

286

287

288

289

290

291

292

293

294

295

296

297

298

299

300

301

302

303

304

305

306

307

308

309

310

311

312

313

314

315

316

317

318

319

320

321

322

323

324

325

326

327

328

329

330

331

332

333

334

335

336

337

338

339

340

341

342

343

344

345

346

347

348

349

350

351

352

353

354

355

356

357

358

359

360

361

362

363

364

365

366

367

368

369

370

371

372

373

374

375

376

377

378

379

380

381

382

383

384

385

386

387

388

389

390

391

392

393

394

395

396

397

398

399

400

401

402

403

404

405

406

407

408

409

410

411

412

413

414

415

416

417

418

419

420

421

422

423

424

425

426

427

428

429

430

431

432

433

434

435

436

437

438

439

440

441

442

443

444

445

446

447

448

449

450

451

452

453

454

455

456

457

458

459

460

461

462

463

464

465

466

467

468

469

470

471

472

473

474

475

476

477

478

479

480

481

482

483

484

485

486

487

488

489

490

491

492

493

494

495

496

497

498

499

500

501

502

503

504

505

506

507

508

509

510

511

512

513

514

515

516

517

518

519

520

521

522

523

524

525

526

527

528

529

530

531

532

533

534

535

536

537

538

539

540

541

542

543

544

545

546

547

548

549

550

551

552

553

554

555

556

557

558

559

560

561

562

563

564

565

566

567

568

569

570

571

572

573

574

575

576

577

578

579

580

581

582

583

584

585

586

587

588

589

590

591

592

593

594

595

596

597

598

599

600

601

602

603

604

605

606

607

608

609

610

611

612

613

614

615

616

617

618

619

620

621

622

623

624

625

626

627

628

629

630

631

632

633

634

635

636

637

638

639

640

641

642

643

644

645

646

647

648

649

650

651

652

653

654

655

656

657

658

659

660

661

662

663

664

665

666

667

668

669

670

671

672

673

674

675

676

677

678

679

680

681

682

683

684

685

686

687

688

689

690

691

692

693

694

695

696

697

698

699

700

701

702

703

704

705

706

707

708

709

710

711

712

713

714

715

716

717

718

719

720

721

722

723

724

725

726

727

728

729

730

731

732

733

734

735

736

737

738

739

740

741

742

743

744

745

746

747

748

749

750

751

752

753

754

755

756

757

758

759

760

761

762

763

764

765

766

767

768

769

770

771

772

773

774

775

776

777

778

779

780

781

782

783

784

785

786

787

788

789

790

791

792

793

794

795

796

797

798

799

800

801

802

803

804

805

806

807

808

809

810

811

812

813

814

815

816

817

818

819

820

821

822

823

824

825

826

827

828

829

830

831

832

833

834

835

836

837

838

839

840

841

842

843

844

845

846

847

848

849

850

851

852

853

854

855

856

857

858

859

860

861

862

863

864

865

866

867

868

869

870

871

872

873

874

875

876

877

878

879

880

881

882

883

884

885

886

887

888

889

890

891

892

893

894

895

896

897

898

899

900

901

902

903

904

905

906

907

908

909

910

911

912

913

914

915

916

917

918

919

920

921

922

923

924

925

926

927

928

929

930

931

932

933

934

935

936

937

938

939

940

941

942

943

944

945

946

947

948

949

950

951

952

953

954

955

956

957

958

959

960

961

962

963

964

965

966

967

968

969

970

971

972

973

974

975

976

977

978

979

980

981

982

983

984

985

986

987

988

989

990

991

992

993

994

995

996

997

998

999

1000

## 0 - INTRODUCTION

### 0.1 - Origine de l'étude

Cette étude a initialement trouvé sa motivation dans un projet mené au Centre d'Informatique et Automatique de l'ENSM, concernant en particulier la gestion optimale d'un habitat solaire [8]. Un certain nombre d'heuristiques avait été développées à cette occasion et, avant de poursuivre, une étude théorique s'avérait nécessaire pour savoir si ces heuristiques pouvaient être étendues à des configurations plus générales. En particulier, la démarche utilisée faisait clairement appel à des notions de temps lent et de temps rapide: l'évolution du stock de chaleur était "lente", celle de la température de la maison était "rapide", celle de la météo était "rapide" et aussi "très rapide". Pour des raisons de stabilité énergétique, l'approximation faite sur le comportement de l'habitat relevait des perturbations singulières. Par contre on pouvait difficilement parler de stabilité pour les phénomènes météo, puisqu'ils présentent souvent (passages nuageux) des caractères "oscillatoires rapides"; et pourtant une séparation nette entre "temps rapide" et "temps lent" était clairement effectuée, puisque certains niveaux de la programmation dynamique considéraient les variables d'état lentes (température du stock d'eau chaude) comme constantes sur un pas de temps, tout en se préoccupant des fluctuations rapides de l'environnement météorologique. En particulier, à ce niveau, la programmation dynamique consistait à minimiser un coût énergétique de type intégral, mais statique, et de type hamiltonien. Ces phénomènes oscillatoires "rapides" et ce coût intégral nous ont fait penser aux méthodes d'averaging utilisées en équations différentielle (moyennisation dans [6]) et en contrôle optimal stochastique [5], ainsi qu'aux techniques d'homogénéisation en équations aux dérivées partielles [3].

Une première étape a consisté à regarder ce qui se passe dans un cas simple, cas linéaire quadratique, phénomène périodique (chap II). Un certain nombre de phénomènes intéressants sont apparus, en particulier la nécessité d'utiliser un contrôle rapide, ainsi que le doublement d'ordre d'approximation. On constatait également que le premier ordre du contrôle optimal provenait d'un nouveau problème linéaire quadratique, mais en temps lent, que nous avons baptisé "problème moyenné". Ceci était confirmé formellement dans le cas non linéaire par l'étude du développement a priori de la fonction valeur (chap I, § 1.2).

Dès lors, trois questions se posaient:

- . généraliser autant que possible la notion de problème moyenné
- . confirmer le développement à priori de la fonction valeur
- . regarder dans quelle mesure la résolution du problème moyenné permet de résoudre la problème d'origine.

C'est à ces questions que nous espérons avoir répondu dans cette étude.

## 0.2 - Objet de l'étude

Nous avons considéré où un problème de contrôle optimal déterministe, dont la dynamique dépend de phénomènes "rapides", modélisés sous la forme d'un temps rapide  $t/\epsilon$ ,  $\epsilon$  petit. Le lecteur notera que ceci définit en fait une classe de problèmes, chacun d'entre eux correspondant à une valeur d' $\epsilon$ . En particulier, nous ne nous sommes pas posés la question d'extrapoler un signal "rapide" en une classe de signaux rapides par  $\epsilon$  interposé: la dépendance en temps rapide est considérée ici comme connue.

D'autre part, le phénomène rapide n'est pas contrôlé, contrairement à ce qui se passe en perturbations singulières. En ceci nous sommes fidèles à l'idée initiale considérant le phénomène rapide comme provenant des fluctuations météorologiques (phénomène non contrôlé s'il en est). Enfin le temps rapide n'intervient pas dans le coût à minimiser, ce qui était le cas dans le sujet initial (coût de chauffage à prix constant). L'étude peut sans doute se généraliser au cas où le coût intégral dépend du temps rapide, au prix de quelques complications techniques.

### 0.3 - Plan

La plus grande partie de l'étude porte sur le cas particulier où le temps rapide intervient de manière périodique dans la dynamique, en particulier dans les trois premiers chapitres.

Dans le premier chapitre, on identifie la fonction valeur limite ( $\epsilon \rightarrow 0$ ) qu'on interprète comme la fonction valeur d'un problème de contrôle optimal: le problème moyenné.

Le second chapitre traite du cas linéaire quadratique, périodique.

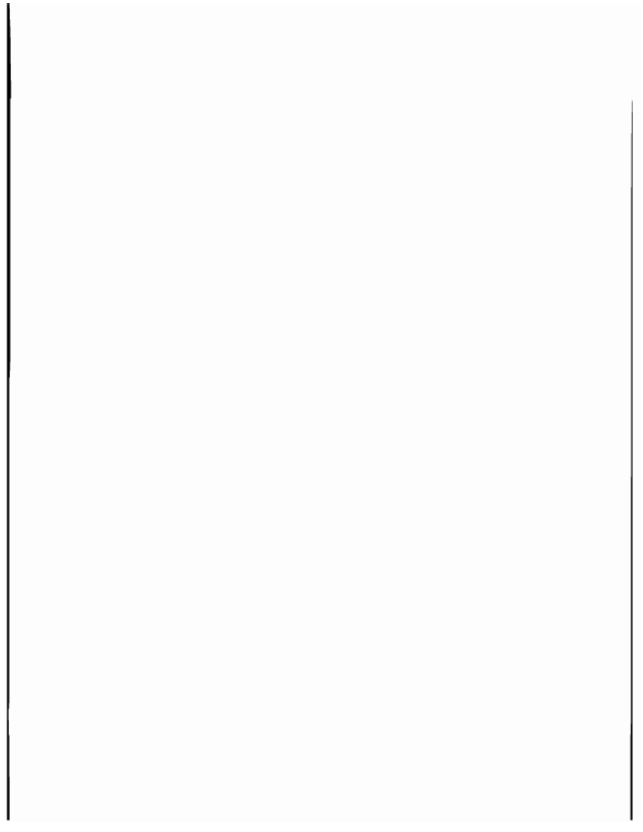
Le troisième chapitre présente un résultat de doublement d'ordre d'approximation, le contrôle utilisé étant le contrôle optimal du problème moyenné (cas périodique).

Le quatrième chapitre présente un résultat de convergence des fonctions valeur ne faisant pas intervenir fondamentalement la périodicité, mais une hypothèse de moyenne sur l'Halmiltonien minimal.

Le cinquième chapitre généralise la notion de problème moyenné au cas non périodique et permet d'interpréter la limite obtenue dans le chapitre précédent.

Enfin une annexe présente quelques résultats simples sur les moyennes d'équations différentielles.

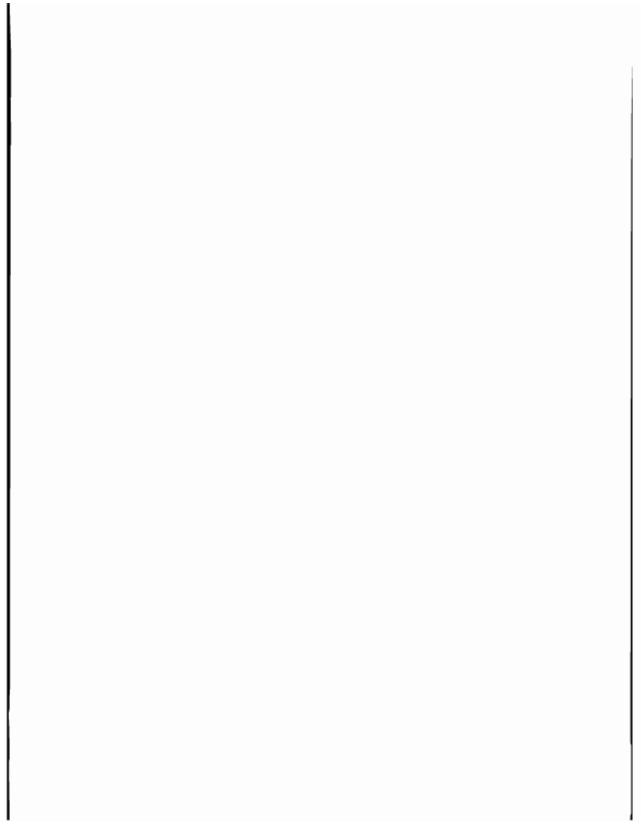




## CHAPITRE I

### PROBLEME MOYENNE

(CAS PERIODIQUE)



# I - PROBLEME MOYENNE DANS LE CAS PERIODIQUE

## 1.1 - Introduction

Nous allons, dans ce chapitre, nous intéresser à des problèmes de contrôle optimal "rapidement oscillants", c'est-à-dire des problèmes  $P_\epsilon$  pouvant se modéliser par :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \times [0, T] \times \mathbb{R}_+ &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ (x, u, t, \theta) &\longrightarrow f(x, u, t, \theta) \end{aligned}$$

où  $f$  est continue, Lipschitz en  $t$  et périodique en  $\theta$  de période  $\omega$  indépendante de  $x, u$  ou  $t$ :  $f(x, u, t, \theta + \omega) = f(x, u, t, \theta)$  pour tout  $x, u, t, \theta$  et

$$\begin{aligned} L : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \times [0, T] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, u, t) &\longrightarrow L(x, u, t) \end{aligned}$$

où  $L$  est continue,

Le problème  $P_\epsilon$  consiste à minimiser:

$$J(u) = \int_0^T L(x(t), u(t), t) dt, \quad \text{sachant que:}$$

$$(1) \quad \begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x(t), u(t), t, \frac{t}{\epsilon}) \text{ p.p.t } t \in [0, T] & (\epsilon > 0, \text{ "petit"}) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

et que  $u \in L^1([0, T], \mathbb{R}^p)$ ,  $u(t) \in U^{\text{ad}}$  p.p.t, où  $U^{\text{ad}}$  est une partie fermée non vide de  $\mathbb{R}_+$ .

On peut qualifier ces problèmes de rapidement oscillants, puisque dans leur dynamique le temps intervient partiellement de manière périodique, avec une période  $\epsilon\omega$ , petite

Nous savons [1] que de telles trajectoires peuvent être approximées, si  $u$  n'est pas trop "rapide" par des trajectoires régies par:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{\omega} \int_0^{\omega} f(y(t), u(t), t, \theta) d\theta$$

$$y(0) = x(0) = x_0$$

Néanmoins, en contrôle optimal, il convient d'être plus prudent quant à de telles approximations, car nous n'avons aucun renseignement sur la "vitesse d'évolution" du contrôle  $u$ , en particulier d'un contrôle optimal  $u^*$ .

Afin de préciser un peu les choses, nous allons regarder ce que pourrait être la limite de la fonction valeur d'un tel problème lorsque  $\epsilon$  tend vers 0 en procédant à un développement formel de celle-ci.

Pour ce faire, et afin de mieux exploiter le caractère périodique du problème, nous considérerons de plus que la phase initiale  $\theta(0)$  (ici=0) peut être quelconque, introduisant ainsi une dimension d'état supplémentaire.

## 1.2 - Développement formel de la fonction valeur et problème moyenné

Considérons le problème de contrôle optimal suivant:

$$\begin{aligned} \tilde{P}_\epsilon \quad & \begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x, u, t, \theta) & , \quad u(t) \in U^{ad} & , \quad x(0) = x_0 \\ \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{\epsilon} & , \quad \epsilon > 0 \end{cases} \\ & \text{Minimiser} \quad \int_0^T L(x(t), u(t), t) dt, \end{aligned}$$

où  $f$  est périodique en  $\theta$  de période  $\omega$ , indépendamment de  $x, u, t$ .

$$\text{Pour } \theta(0) = \theta_0, \text{ on a : } \frac{dx}{dt} = f(x(t), u(t), t, \theta_0 + \frac{t}{\epsilon})$$

Or on sait que, pour  $\epsilon$  petit, une telle trajectoire peut en général être approchée par une trajectoire  $y$  partant de même condition initiale  $x_0$  et régie par:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{\omega} \int_0^{\omega} f(y(t), u(t), t, \theta) d\theta,$$

et on peut donc approcher le coût par:

$$\int_0^T L(y(t), u(t), t) dt.$$

De telles trajectoires et de tels coûts sont indépendants de la condition  $\Theta_0$ . Il semble donc que pour  $\epsilon$  petit on puisse approcher le problème d'origine par un problème où l'état rapide  $\Theta$  aurait disparu.

Si  $V^\epsilon(x, t, \Theta)$  est la fonction valeur du problème d'origine, on peut donc espérer l'approcher par une fonction de la forme  $V(x, t)$ .

Supposons donc que  $V^\epsilon$  puisse se développer en  $\epsilon$  de la manière suivante:

$$(2) \quad V^\epsilon(x, t, \Theta) = V_0(x, t) + \sum_{k=1}^{\infty} \epsilon^k V_k(x, t, \Theta)$$

Remarquons que  $V^\epsilon$  est périodique en  $\Theta$  de période  $\omega$  et que donc, si le développement ci-dessus est valable pour tout  $\epsilon$  dans un voisinage de 0, les  $V_k$  doivent être périodiques également.

Nous allons étudier  $V_0$  à partir de l'équation d'Hamilton-Jacobi.  $V^\epsilon$

vérifie:

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial V^\epsilon}{\partial t}(x, t, \Theta) + \frac{1}{\epsilon} \frac{\partial V^\epsilon}{\partial \Theta}(x, t, \Theta) \\ \quad + \min_{u \in U^{\text{ad}}} \left\{ \frac{\partial V^\epsilon}{\partial x}(x, t, \Theta) f(x, u, t, \Theta) + L(x, u, t) \right\} = 0 \\ V^\epsilon(x, T, \Theta) = 0 \end{array} \right.$$

Développons (1.2.2) à l'aide de (1.2.1), en supposant que le développement passe à la dérivation. Au premier ordre on a:

$$\frac{\partial V_0}{\partial t}(x, t) + \frac{\partial V_0}{\partial \Theta}(x, t, \Theta) + \min_{u \in U^{\text{ad}}} \left\{ \frac{\partial V_0}{\partial x}(x, t) f(x, u, t, \Theta) + L(x, u, t) \right\} = 0$$

Compte tenu de la périodicité de  $V_1$ , on obtient, après intégration en  $\theta$  sur une période:

$$\frac{\partial V_0}{\partial t}(x, t) + \frac{1}{\omega} \int_0^\omega \left[ \min_{u \in U^{ad}} \left( \frac{\partial V_0}{\partial x}(x, t) f(x, u, t, \theta) + L(x, u, t) \right) \right] d\theta = 0,$$

Or l'hamiltonien ici moyenné peut en fait se réécrire (à condition, par exemple, que la minimisation n'envoie par  $u$  à l'infini quand  $\theta$  varie) comme le minimum dans  $W^{ad}$ , de:

$$\bar{H}\left(\frac{\partial V_0}{\partial x}, x, v, t\right) = \frac{1}{\omega} \int_0^\omega \left[ \frac{\partial V_0}{\partial x}(x, t) f(x, v(\theta), t, \theta) + L(x, v(\theta), t) \right] d\theta,$$

$$\text{où } W^{ad} = \{ v \in L^1([0, \omega], \mathbb{R}^p), v(\theta) \in U^{ad} \text{ pp } \theta \}.$$

$V_0$  vérifie donc:

$$(4) \quad \frac{\partial V_0}{\partial t}(x, t) + \min_{\substack{V(\cdot) \\ V(\theta) \in U^{ad} \text{ pp } \theta}} \left\{ \frac{\partial V_0}{\partial x}(x, t) \frac{1}{\omega} \int_0^\omega f(x, v(\theta), t, \theta) d\theta + \frac{1}{\omega} \int_0^\omega L(x, v(\theta), t) d\theta \right\} = 0$$

Il reste à trouver une condition limite à  $V_0$ .

Or, si on a  $V^\epsilon(x, T, \theta) = 0$  pour tout  $x$ ,  $\theta$  et tout  $\epsilon$  au voisinage de 0, on doit avoir  $V_0(x, T) = 0$  pour tout  $x$ .

De (4) et de la condition limite précédente, on peut donner une interprétation de  $V_0$  en terme de contrôle.

En effet, on peut donner à  $V_0$  le sens suivant:

$V_0$  est solution de l'équation d'Hamilton Jacobi du problème de contrôle optimal suivant  $\bar{P}$ :

À l'instant  $t$ , le contrôle  $v$  prend sa valeur  $v_t$  dans l'ensemble  $W^{ad}$  des applications de  $(0, \omega)$  à valeur presque partout dans  $U^{ad}$ , intégrables.  $v_t$  peut s'interpréter comme un feedback sur  $\theta$ .

La dynamique est donnée alors par:

$$\boxed{\frac{dy}{dt} = \frac{1}{\omega} \int_0^{\omega} f(y(t), v_t(\theta), t, \theta) d\theta} \quad \text{où} \quad \begin{aligned} v &\in L'([0, T], L'([0, \omega] \mathbb{R}^p)) \\ v_t &\in W^{ad} \text{ ppt} \end{aligned}$$

et le coût à minimiser est :

$$\boxed{\int_0^T \frac{dt}{\omega} \int_0^{\omega} L(y(t), v_t(\theta), t, \theta) d\theta.}$$

On voit que  $\bar{P}$  se déduit de  $\tilde{P}_\epsilon$  (ou  $P_\epsilon$ ) en moyennant dynamique et coût en  $\theta$ , à condition de considérer des contrôles en feedback sur l'état rapide  $\theta$ . C'est pourquoi on donnera à  $\bar{P}$  l'appellation de problème moyenné.

Bien que les calculs précédents soient purement formels, ils permettent de mettre en évidence comme candidat à une "limite" du problème  $P_\epsilon$  un nouveau problème de contrôle, dit moyenné. En particulier, ce problème moyenné se définit aisément à partir des données du problème  $P_\epsilon$ , c'est autour de ce problème que sera construite l'étude qui va suivre (chapitres II et III).

### 1.3 - Remarque:

Le problème moyenné présenté ici peut ne pas paraître classique, puisqu'il fait appel à des contrôles prenant ses valeurs dans un espace de dimension infinie. En fait le lecteur se convaincra aisément qu'il est tout à fait classique, en ce sens qu'il peut être traité par les outils habituels du contrôle optimal, principe du minimum, programmation dynamique... Ce point est d'ailleurs repris rapidement dans le chapitre V (problème moyenné, cas non périodique).

Une autre question peut être posée: si on résout le problème moyenné et que l'on utilise un contrôle optimal de celui-ci pour commander le système d'origine ( $\theta = t/\epsilon$ ), on sera a priori en feedback sur l'état rapide. Est-ce bien nécessaire pour espérer être optimal (ou presque)? La réponse est oui, comme le prouve l'exemple suivant, assez simple bien que relativement général.



Nous allons considérer un problème linéaire quadratique rapidement oscillant et montrer qu'un contrôle "lent" (et en particulier un contrôle ignorant l'état rapide) ne peut être quasi optimal. Plus précisément, nous allons considérer une suite de contrôles  $u^\epsilon$  dans  $H^1([0,T],\mathbb{R})$  (la continuité ici ne sera pas un facteur de sous optimalité) et "lents", c'est à dire vérifiant:

$$\epsilon \left\| \frac{du^\epsilon}{dt} \right\|_{L^2} \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} 0$$

et montre qu'une telle suite de contrôles ne peut être quasi optimale pour  $\epsilon$  petit, c'est-à-dire  $\liminf J^\epsilon(u^\epsilon) \geq \inf J^\epsilon(u) + k$ ,  $\forall \epsilon$ ,  $k > 0$

En effet considérons le problème:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx^\epsilon}{dt} = -x^\epsilon + u^\epsilon \sin \frac{t}{\epsilon}, \quad x^\epsilon(0) = x_0, \quad x^\epsilon(t) \in \mathbb{R}, \quad t \in [0,T] \\ \text{Minimiser} \quad \int_0^T [(x^\epsilon(t))^2 + \epsilon(u^\epsilon(t))^2] dt, \quad \text{avec} \quad \epsilon > 0 \end{array} \right.$$

Pour  $u$  soit quasi optimal, on doit avoir  $\liminf J^\epsilon(u) \leq J^\epsilon(0)$  (qui est en fait indépendant de  $\epsilon$ ) et donc  $\|u^\epsilon\|_{L^2} \leq M$  pour tout  $\epsilon$ .

En particulier la trajectoire engendrée par  $u^\epsilon$  restera bornée en norme sup, c'est-à-dire:

$$\sup_{t \in [0,T]} |x^\epsilon(t)| \leq M,$$

pour tout  $\epsilon$  et tout  $u^\epsilon$  quasi-optimal.

Nous allons montrer que pour

$$\|u^\epsilon\|_{L^2} \leq M, \quad \epsilon \left\| \frac{du^\epsilon}{dt} \right\|_{L^2} \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} 0$$

$$\int_0^T (x^\epsilon)^2 dt \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} J^\epsilon(0) = J(0)$$

puis montrer qu'en général  $0$  n'est pas quasi-optimal et donc nous aurons montré qu'on ne peut avoir de contrôle quasi optimal vérifiant :

$$\epsilon \left\| \frac{du^\epsilon}{dt} \right\|_{L^2}^2 \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} 0$$

Soit donc  $y$  la trajectoire commandée par  $u = 0$ ; nous avons :

$$y(t) = x_0 e^{-t}$$

$$x^\epsilon(t) = y(t) + \int_0^t e^{s-t} u^\epsilon(s) \sin \frac{s}{\epsilon} ds \text{ et donc :}$$

$$\int_0^T (x^\epsilon)^2 dt - J(0) = \int_0^T (x^\epsilon(t) + y(t)) \int_0^t e^{s-t} u^\epsilon(s) \sin \frac{s}{\epsilon} ds$$

$\|x^\epsilon\|_\infty$  est borné. D'autre part :

$$\int_0^t e^s u^\epsilon(s) \sin \frac{s}{\epsilon} ds = u^\epsilon(s) \int_0^t e^s \sin \frac{s}{\epsilon} ds - \int_0^t \frac{du^\epsilon}{ds} \int_0^s e^\lambda \sin \frac{\lambda}{\epsilon} d\lambda$$

$$\text{Or } \left| \int_0^t e^s \sin \frac{s}{\epsilon} ds \right| \leq k\epsilon$$

$$\text{et } \|u^\epsilon\|_\infty \leq k \|u^\epsilon\|_{L^2}^{1/2} \|u^\epsilon\|_{H^1}^{1/2}, \text{ d'où :}$$

$$\begin{aligned} \left| \int_0^t e^s u^\epsilon(s) \sin \frac{s}{\epsilon} ds \right| &\leq k \epsilon \left( \|u^\epsilon\|_{L^2}^{1/2} \|u^\epsilon\|_{H^1}^{1/2} + \left\| \frac{du^\epsilon}{dt} \right\|_{H^1} \right) \\ &\leq k \epsilon \|u^\epsilon\|_{H^1} \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} 0 \end{aligned}$$

$$\text{et donc } \int_0^T |x^\epsilon|^2 dt \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} J(0)$$

Voyons maintenant au second point:  $0$  n'est pas quasi-optimal  
Pour simplifier les calculs, prenons  $r = 1/24$

La fonction valeur de problème moyenné vaut:

$$x_o^2 p_o(t), p_o(t) = \frac{1-e^{4(t-T)}}{3+e^{4(t-T)}} > 0$$

La trajectoire moyennée correspondante est définie par:

$$\frac{dx}{dt} = -(1+6p_o)y = -\frac{9-5e^{4(t-T)}}{3+e^{4(t-T)}} y, \quad y(0) = x_o$$

Prenons (par exemple!) la commande  $u(t, \frac{t}{\epsilon}) = -12 p_o(t)y(t) \sin \frac{t}{\epsilon}$  ;

nous avons  $\frac{dx}{dt} = -x - 12 p_o(t)y(t) \sin^2 \frac{t}{\epsilon}$  dont nous savons que  $z$ :

$\frac{dz}{dt} = -z - 6 p_o(t)y(t)$ ,  $z(0) = x_o$  est telle que:

$$|x(t) - z(t)| < k \epsilon \quad \text{cad} : \quad |x(t) - y(t)| < k \epsilon$$

et donc  $\int_0^T x^2(t)dt$  est asymptote à  $\int_0^T y^2(t)dt$ .

D'autre part  $\int_0^T r u^2(t, \frac{t}{\epsilon})dt$  est asymptote à  $\int_0^T r \frac{dt}{\omega} \int_0^\omega u^2(t, \theta)d\theta$

$$= \int_0^T 3 p_o^2(t)y^2(t)dt \quad \text{et donc}$$

$\int_0^T (x^2 + ru^2)dt$  est asymptote à  $\int_0^T y^2(1+3 p_o^2)dt = x_o^2 p_o^2(0)$

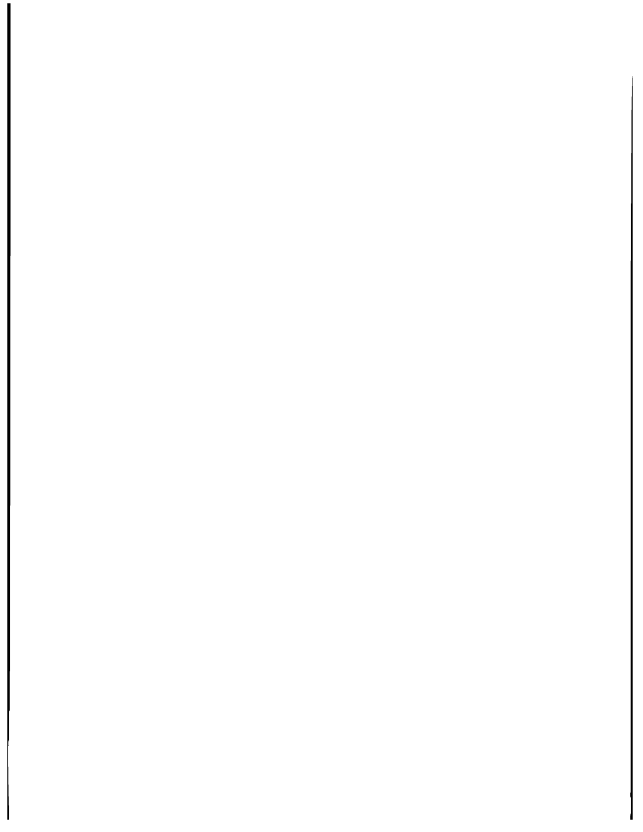
$$\text{donc } |J^\epsilon(u) - x_o^2 \frac{1-e^{-4T}}{3+e^{-4T}}| < k \epsilon$$

Il convient donc de comparer  $\frac{1-e^{-4T}}{3+e^{-4T}}$  à  $\frac{1-e^{-2T}}{2}$

$$\text{or } \frac{1-e^{-2T}}{2} - \frac{1-e^{-4T}}{3+e^{-4T}} = -\frac{(e^{-2T}-1)^3}{2(3+e^{-4T})} > 0 \quad \text{pour tout } T > 0$$

et donc le contrôle nul n'est jamais quasi-optimal, d'où la nécessité de prendre des contrôles suffisamment rapides. Nous verrons plus tard que  $u(u(t, t/\epsilon) = -12 P_0(t) \gamma(t) \sin t/\epsilon)$  est, lui, un contrôle quasi-optimal (chapitre II, cas linéaire quadratique).

On voit bien que, dans cet exemple, les contrôles "lents" sont sans effet (asymptotiquement) sur la dynamique, alors que des contrôles "rapides" modifient suffisamment celle-ci pour obtenir un coût qui s'avère, pour le contrôle choisi, ici meilleur. On notera en particulier que la moyenne du contrôle optimal du problème moyenné n'est pas quasi-optimale et que, de manière générale, on ne peut, dans cet exemple (bien anodin) exhiber de contrôle lent quasi-optimal, contrairement à ce qui se passe en perturbations singulières.



CHAPITRE 2  
CAS LINEAIRE QUADRATIQUE  
(CAS PERIODIQUE)

100

101

102

103

104

105

106

107

108

109

110

111

112

113

114

115

116

117

118

119

120

121

122

123

124

125

126

127

128

129

130

131

132

133

134

135

136

137

138

139

140

141

142

143

144

145

146

147

148

149

150

151

152

153

154

155

156

157

158

159

160

161

162

163

164

165

166

167

168

169

170

171

172

173

174

175

176

177

178

179

180

181

182

183

184

185

186

187

188

189

190

191

192

193

194

195

196

197

198

199

200

201

202

203

204

205

206

207

208

209

210

211

212

213

214

215

216

217

218

219

220

221

222

223

224

225

226

227

228

229

230

231

232

233

234

235

236

237

238

239

240

241

242

243

244

245

246

247

248

249

250

251

252

253

254

255

256

257

258

259

260

261

262

263

264

265

266

267

268

269

270

271

272

273

274

275

276

277

278

279

280

281

282

283

284

285

286

287

288

289

290

291

292

293

294

295

296

297

298

299

300

301

302

303

304

305

306

307

308

309

310

311

312

313

314

315

316

317

318

319

320

321

322

323

324

325

326

327

328

329

330

331

332

333

334

335

336

337

338

339

340

341

342

343

344

345

346

347

348

349

350

351

352

353

354

355

356

357

358

359

360

361

362

363

364

365

366

367

368

369

370

371

372

373

374

375

376

377

378

379

380

381

382

383

384

385

386

387

388

389

390

391

392

393

394

395

396

397

398

399

400

401

402

403

404

405

406

407

408

409

410

411

412

413

414

415

416

417

418

419

420

421

422

423

424

425

426

427

428

429

430

431

432

433

434

435

436

437

438

439

440

441

442

443

444

445

446

447

448

449

450

451

452

453

454

455

456

457

458

459

460

461

462

463

464

465

466

467

468

469

470

471

472

473

474

475

476

477

478

479

480

481

482

483

484

485

486

487

488

489

490

491

492

493

494

495

496

497

498

499

500

501

502

503

504

505

506

507

508

509

510

511

512

513

514

515

516

517

518

519

520

521

522

523

524

525

526

527

528

529

530

531

532

533

534

535

536

537

538

539

540

541

542

543

544

545

546

547

548

549

550

551

552

553

554

555

556

557

558

559

560

561

562

563

564

565

566

567

568

569

570

571

572

573

574

575

576

577

578

579

580

581

582

583

584

585

586

587

588

589

590

591

592

593

594

595

596

597

598

599

600

601

602

603

604

605

606

607

608

609

610

611

612

613

614

615

616

617

618

619

620

621

622

623

624

625

626

627

628

629

630

631

632

633

634

635

636

637

638

639

640

641

642

643

644

645

646

647

648

649

650

651

652

653

654

655

656

657

658

659

660

661

662

663

664

665

666

667

668

669

670

671

672

673

674

675

676

677

678

679

680

681

682

683

684

685

686

687

688

689

690

691

692

693

694

695

696

697

698

699

700

701

702

703

704

705

706

707

708

709

710

711

712

713

714

715

716

717

718

719

720

721

722

723

724

725

726

727

728

729

730

731

732

733

734

735

736

737

738

739

740

741

742

743

744

745

746

747

748

749

750

751

752

753

754

755

756

757

758

759

760

761

762

763

764

765

766

767

768

769

770

771

772

773

774

775

776

777

778

779

780

781

782

783

784

785

786

787

788

789

790

791

792

793

794

795

796

797

798

799

800

801

802

803

804

805

806

807

808

809

810

811

812

813

814

815

816

817

818

819

820

821

822

823

824

825

826

827

828

829

830

831

832

833

834

835

836

837

838

839

840

841

842

843

844

845

846

847

848

849

850

851

852

853

854

855

856

857

858

859

860

861

862

863

864

865

866

867

868

869

870

871

872

873

874

875

876

877

878

879

880

881

882

883

884

885

886

887

888

889

890

891

892

893

894

895

896

897

898

899

900

901

902

903

904

905

906

907

908

909

910

911

912

913

914

915

916

917

918

919

920

921

922

923

924

925

926

927

928

929

930

931

932

933

934

935

936

937

938

939

940

941

942

943

944

945

946

947

948

949

950

951

952

953

954

955

956

957

958

959

960

961

962

963

964

965

966

967

968

969

970

971

972

973

974

975

976

977

978

979

980

981

982

983

984

985

986

987

988

989

990

991

992

993

994

995

996

997

998

999

1000

## II - CAS LINEAIRE QUADRATIQUE

### 2.1 - Introduction

Nous allons étudier, sur deux exemples, le comportement du problème  $P^\epsilon$  pour  $\epsilon$  petit. La forme particulière et bien connue des problèmes traités nous permettra de conduire jusqu'au bout un certain nombre de calculs dont l'exécution dans le cas non-linéaire serait d'une difficulté prohibitive.

De cette étude on peut retenir deux éléments essentiels:

non seulement il n'existe pas de développement limité à proprement parler de la fonction valeur (ce à quoi on s'attendait) mais un développement asymptotique doit, à partir d'un certain ordre, tenir compte à la fois de la phase initiale ( $\sim t/\epsilon$ ) et de la phase finale ( $\sim T/\epsilon$ ). On mettra ce fait en parallèle avec les développements de trajectoires présentés en annexe, où l'on voit bien, à partir du second ordre, intervenir un terme de phase ( $x_2(t, t/\epsilon)$ ), que l'on peut, dans une certaine mesure, associer à un phénomène de couche limite; le terme de phase finale étant probablement associé à un phénomène analogue sur l'état adjoint.

on observe, comme en perturbations régulières, un doublement d'ordre d'approximation, en particulier si on utilise le contrôle optimal (boucle ouverte) du problème moyenné (la notion de problème moyenné est ici essentielle) Ceci n'est pas incompatible avec ce que l'on observe en perturbations singulières: en effet, nous avons vu (cf Remarque (1.3)) qu'on ne peut en général pas définir de contrôle lent qui soit quasi optimal (en général, puisque ce n'est pas le cas dans le premier exemple traité ici); si donc on veut faire une analogie avec les résultats obtenus en perturbations singulières, il faut considérer globalement: contrôle lent + feedback composite; or ce contrôle engendre, lui, un doublement de l'ordre d'approximation.



## 2.2 - Etude d'un exemple

### 2.2.1 - Présentation

Nous allons considérer dans un premier temps le problème :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax + cu + d(\theta) & x \in \mathbb{R}^n \\ \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{\epsilon} & \theta \in \mathbb{R}, \quad t \in [0, T] \end{cases}$$

$$\text{Minimiser } \int_0^T (x^2 + ru^2) dt,$$

où  $a$  et  $c$  sont deux réels,  $r$  et  $\epsilon$  deux réels  $> 0$  et  $d$  une fonction continue de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ , périodique de période  $\omega$ , non constante.

Ceci constitue un exemple simple de problème "rapidement oscillant".

L'étude se fera en deux temps: nous commencerons par chercher un développement asymptotique de la fonction valeur pour  $\epsilon$  petit, puis nous tenterons d'utiliser ce développement afin d'élaborer des contrôles quasi optimaux.

Notations:

Pour  $f$  périodique de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ , continue, nous désignerons par  $\bar{f}$  la moyenne de  $f$  et par  $\Pi(f)$  la primitive de  $f - \bar{f}$  de moyenne nulle.

### 2.2.2 - Développement à priori de la fonction valeur

La fonction valeur du problème  $V^\epsilon$  est de la forme:

$$V^\epsilon(x, t, \theta) = P(t)x^2 + 2 Q^\epsilon(t, \theta)x + R^\epsilon(t, \theta)$$

où  $Q^\epsilon$  et  $R^\epsilon$  sont périodiques en  $\theta$  de période  $\omega$ .

Une première idée consiste à chercher un développement de  $Q^\epsilon$  et  $R^\epsilon$  sous la forme:

$$Q^\epsilon(t, \theta) = Q(t) + \sum_{k=1}^{\infty} \epsilon^k Q_k(t, \theta) \quad \text{et}$$

$$R^\epsilon(t, \theta) = R(t) + \sum_{k=1}^{\infty} \epsilon^k R_k(t, \theta).$$

En général, ce développement n'est pas compatible avec les conditions aux limites:  $Q^\epsilon(T, \theta) = 0$  et  $R^\epsilon(T, \theta) = 0$ .

En effet, supposons la convergence des séries et des séries dérivées uniforme et "développons" l'équation d'Hamilton-Jacobi en puissances d' $\epsilon$ . Nous savons que  $P$  est indépendant du terme additif  $d$  et donc d' $\epsilon$ .  $P$  vérifie:

$$(1) \quad \frac{dP}{dt} + 2aP + 1 - \frac{c^2}{r} P^2 = 0 \quad P(T) = 0$$

Nous avons d'autre part

$$(2) \quad \frac{\partial Q^\epsilon}{\partial t} + \frac{1}{\epsilon} \frac{\partial Q^\epsilon}{\partial \theta} + a Q^\epsilon - \frac{c^2}{r} P Q^\epsilon + P d(\theta) = 0, \quad Q^\epsilon(T, \theta) = 0$$

$$(3) \quad \frac{\partial R^\epsilon}{\partial t} + \frac{1}{\epsilon} \frac{\partial R^\epsilon}{\partial \theta} + 2Q^\epsilon d(\theta) - \frac{c^2}{r} (Q^\epsilon)^2 = 0, \quad R^\epsilon(T, \theta) = 0$$

et donc:

$$(4) \quad \frac{dQ}{dt} + \frac{\partial Q_1}{\partial \theta} + a Q - \frac{c^2}{r} P Q + P d(\theta) = 0, \quad Q(T) = 0$$

$$(5) \quad \frac{dR}{dt} + \frac{\partial R_1}{\partial \theta} + 2 Q d(\theta) - \frac{c^2}{r} Q^2 = 0, \quad R(T) = 0$$

Après moyenne en  $\theta$  sur une période, nous avons:

$$(6) \quad \frac{dQ}{dt} + a Q - \frac{c^2}{r} P Q + \bar{d} P = 0 \quad Q(T) = 0$$

$$(7) \quad \frac{dR}{dt} + 2 Q \bar{d} - \frac{c^2}{r} Q^2 = 0 \quad R(T) = 0$$

Les deux équations précédentes ayant une solution unique, nous en déduisons R et Q. Remarquons que  $Px^2 + 2Qr + R$  est la fonction valeur du problème moyenné:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dy}{dt} = ay + c \frac{1}{\omega} \int_0^{\omega} u_t(\theta) d\theta + d \\ \text{Minimiser } \int_0^T [y^2 + r(\frac{1}{\omega} \int_0^{\omega} u_t^2(\theta) d\theta)] dt \end{array} \right.$$

En effet nous savons que P est solution maximale de (1).

De (4), (5), (6) et (7), nous déduisons:

$$\frac{\partial Q_1}{\partial \theta} + p(d(\theta) - \bar{d}) = 0$$

$$\frac{\partial R_1}{\partial \theta} + 2Q(d(\theta) - \bar{d}) = 0$$

$$\text{d'où } Q_1 = -Pn(d) + q_1(t) ; \quad Q_1(T) = q_1(T) = 0$$

$$R_1 = -2Qn(d) + r_1(t) ; \quad R_1(T) = r_1(T) = 0$$

A l'ordre suivant et après moyenne, nous obtenons:

$$\frac{dq_1}{dt} - aq_1 - \frac{c^2}{r} Pq_1 = 0 \quad q_1(T) = 0$$

$$\frac{dr_1}{dt} + 2q_1 \bar{d} - 2P \overline{n(d)d} - 2 \frac{c^2}{r} Qq_1$$

$$\frac{dr_1}{dt} + 2q_1 \bar{d} - 2 \frac{c^2}{r} Qq_1 = 0 \quad , \quad r_1(T) = 0$$

$$\text{d'où } r_1 = q_1 = 0 \quad , \quad Q_1 = -Pn(d), \quad R_1 = -2Qn(d)$$

Nous avons donc:

$$\begin{aligned} & - \frac{dP}{dt} n(d) - a P n(d) + \frac{c^2}{r} P^2 n(d) + \frac{\partial Q_2}{\partial \theta} \\ & = - n(d) \left( \frac{dP}{dt} + a P - \frac{c^2}{r} P^2 \right) + \frac{\partial Q_2}{\partial \theta} \\ & = - n(d) (a P + 1) + \frac{\partial Q_2}{\partial \theta} = 0 \end{aligned}$$

En particulier, pour  $t = T$  nous avons, pour tout  $\Theta$ :

$$\Pi(d)(\Theta) + \frac{\partial Q_2}{\partial \Theta}(T, \Theta) = 0$$

Or  $Q_2(T, \Theta) = 0$  donc  $\Pi(\bar{d}) = 0$  et  $d = \bar{d}$  ;

or  $d$  est supposée non-constante

La forme choisie de développement ne convient donc pas. Nous allons maintenant prouver que  $V^\varepsilon$  se développe sous la forme suivante:

$$V^\varepsilon(x, t, \Theta) = V_0(x, t) + \varepsilon V_1(x, t, \Theta) + \sum_{k=2}^{\infty} \varepsilon^k V_k(x, t, \Theta, \Theta + \frac{T-t}{\varepsilon}),$$

Plus précisément, nous avons le théorème suivant:

2.2.3 - Théorème 2.1 (développement de la fonction valeur)

$$(8) \quad Q^\epsilon(T, \Theta) = \Gamma_Q(T, \Theta) \text{ avec}$$

$$(9) \quad \Gamma_Q = Q(t) - \epsilon P(t) \Pi(d)(\Theta) + \sum_{k=2}^{\infty} \epsilon^k (a_k(t) D_k(\Theta + \frac{T-t}{\epsilon}) + b_k(t) D_k(\Theta))$$

où  $\Gamma_Q, \frac{\partial \Gamma_Q}{\partial t}; \frac{\partial \Gamma_Q}{\partial \Theta}$  convergent normalement, uniformément en  $\epsilon$  au voisinage de 0 et

$$(10) \quad R^\epsilon(t, \Theta) = \beta(t) \frac{C^2}{r} (Q^\epsilon)^2 - 2 Z^\epsilon(t, \Theta), \quad \text{où:}$$

$$(11) \quad Z^\epsilon(t, \Theta) = \Gamma_Z(t, \Theta) \text{ avec}$$

$$(12) \quad \Gamma_Z = Z_0(t) + \epsilon Z_1(t, \Theta) + \sum_{k=2}^{\infty} \epsilon^k (\mu_k(t) + \delta_k(t, \Theta) + \gamma_k(t, \Theta, \tau) + \gamma_k(t, \tau)) \Big|_{\tau=\Theta + T \frac{t}{\epsilon}}$$

où  $\Gamma_Z, \frac{\partial \Gamma_Z}{\partial t}, \frac{\partial \Gamma_Z}{\partial \Theta}$  (séries dérivées) convergent normalement uniformément en  $\epsilon$  au voisinage de 0 et où on a:

$D_1 = \Pi(d), D_{k+1} = \Pi(D_k), \beta$  est l'unique solution sur  $[0, T]$  de

$$\begin{cases} \frac{d\beta}{dt} + 2\beta \left( \frac{C^2}{r} P - a \right) = 1 \\ \beta(T) = 0 \end{cases}$$

et  $a_k, b_k, \mu_k, \delta_k, \gamma_k, v_k$  sont de classe  $C^1$ , d'arguments réels, à valeurs dans  $R_+$ , et  $\delta_k, \gamma_k, v_k$  sont périodiques de période  $\omega$  en  $\Theta$  et en  $\tau$ . [ $\mu_k, \delta_k, \gamma_k, v_k$  représentent une décomposition canonique une fonction périodique de deux variables].

De plus, les deux premiers termes de ces développements correspondent à ceux du développement précédent (qui sont donc exacts).

# A) Etude de $Q^\epsilon$

## a) Identification des $a_k, b_k$

(2) et (3) formant un système "triangulaire", nous pouvons étudier  $Q^\epsilon$

indépendamment de  $R^\epsilon$ . Reportant  $\Gamma_Q$  dans (2) nous obtenons aux ordres:

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 : \frac{dQ}{dt} - P(d-\bar{d}) + aQ - \frac{c^2}{r} PQ + Pd = 0, \quad Q(T) = 0 \quad (\text{vérifiée}) \\ 1 : -\frac{dP}{dt} D_1 + b_2 D_1 - aP D_1 - \frac{c^2}{r} P^2 D_1 = 0 \\ k \geq 2 : \frac{db_k}{dt} D_k(\theta) + \frac{dq_k}{dt} D_k(\theta + \frac{T-t}{\epsilon}) + b_{k+1} D_k(\theta) + (a - \frac{c^2}{r} P) \\ \qquad \qquad \qquad [b_k D_k(\theta) + a_k D_k(\theta + \frac{T-t}{\epsilon})] \end{array} \right.$$

ceci pour tout  $\theta, \epsilon$ .

avec  $a_k(T) + b_k(T) = 0, \quad k \geq 2$ .

Nous avons donc:

$$\left\{ \begin{array}{l} b_2 = -(aP + 1) \\ b_{k+1} = -(a - \frac{c^2}{r} P) b_k - \frac{db_k}{dt} \quad k \geq 2 \\ \frac{da_k}{dt} + (a^2 - \frac{c^2}{r}) P a_k = 0, \quad a_k(T) = -b_k(T), \quad k \geq 2 \end{array} \right.$$

ce qui nous définit la suite des  $a_k, b_k$  de manière unique

$$\text{On vérifie que: } \left\{ \begin{array}{l} a_{2k} = (a^2 + \frac{c^2}{r})^{k-1} e^{\int_t^T (a - \frac{c^2}{r} P) ds} \\ b_{2k} = -(a^2 + \frac{c^2}{r})^{k-1} (aP + 1) \end{array} \right. \quad k \geq 1$$

$$\text{et: } \left\{ \begin{array}{l} a_{2k+1} = 0 \end{array} \right. \quad k \geq 1$$

b) Convergence de la série  $\Gamma_Q$

Comme  $\|D_X\|_\infty < (2\omega)^k \|d\|_\infty$ , on peut majorer la série des normes associée à  $\Gamma_Q$  par une série géométrique et conclure à la convergence uniforme dans un voisinage de 0.

Il reste à étudier la convergence de séries dérivées:

La série obtenue par  $\frac{\partial}{\partial \Theta}$  ne pose pas de problème; la série obtenue

par  $\frac{\partial}{\partial t}$  vaut  $-\frac{1}{\epsilon} \frac{\partial Q^\epsilon}{\partial \Theta} + \frac{c^2}{r} PQ^\epsilon - Pd(\Theta)$  par construction et on conclut donc à la convergence uniforme au voisinage de 0.

La série  $\Gamma_Q$  vérifie donc (2); cette équation admettant une solution unique, on conclut à l'égalité de  $Q^\epsilon$  et de la série  $\Gamma_Q$ .

## B) Etude de $Z^\epsilon$

### a) Préliminaires

De (10) nous déduisons :

$$\begin{aligned} & -2 \frac{\partial Z^\epsilon}{\partial t} + (1 - 2\beta \left(\frac{c^2}{r} P - a\right)) \frac{c^2}{r} (Q^\epsilon)^2 + 2\beta \frac{c^2}{r} Q^\epsilon \frac{\partial Q^\epsilon}{\partial t} \\ & + \frac{1}{\epsilon} \left( -2 \frac{\partial Z^\epsilon}{\partial \theta} + 2\beta \frac{c^2}{r} Q^\epsilon \frac{\partial Q^\epsilon}{\partial \theta} \right) + 2Q^\epsilon d(\theta) - \frac{c^2}{r} (Q^\epsilon)^2 \\ & = -2 \frac{\partial Z^\epsilon}{\partial t} + 2\beta \frac{c^2}{r} Q^\epsilon \left( \frac{\partial Q^\epsilon}{\partial t} + \frac{1}{\epsilon} \frac{\partial Q^\epsilon}{\partial \theta} - \frac{c^2}{r} P Q^\epsilon + P Q^\epsilon + a Q^\epsilon \right) \\ & - 2 \frac{1}{\epsilon} \frac{\partial Z^\epsilon}{\partial \theta} + 2 Q^\epsilon d(\theta) = \\ & 2 \left[ -\frac{\partial Z^\epsilon}{\partial t} - \frac{1}{\epsilon} \frac{\partial Z^\epsilon}{\partial \theta} - \beta \frac{c^2}{r} Q^\epsilon P d\theta + Q^\epsilon d(\theta) \right] = 0 \end{aligned}$$

$$\text{et donc (14)} \quad \boxed{\frac{\partial Z^\epsilon}{\partial t} + \frac{1}{\epsilon} \frac{\partial Z^\epsilon}{\partial \theta} = Q^\epsilon d(\theta) \left(1 - \beta \frac{c^2}{r} P\right), \quad Z^\epsilon(T, \theta) = 0}$$

où l'on s'est débarrassé de  $(Q^\epsilon)^2$ .

$$\text{Nous posons } \alpha(t) = 1 - \frac{c^2}{r} \beta(t)P(t), \quad A(t) = - \int_t^T \alpha(s) a_2(s) ds$$

$$M_k = \overline{dD_k}, \quad , \quad B(t) = - \int_t^T \alpha(s) b_2(s) ds$$

$$\Delta_k = \Pi(dD_k)$$

### b) Identification de $\Gamma_Z$

Développement du second membre :

$$\text{ordre 0 : } Qd(\theta)\alpha(t)$$

$$\text{ordre 1 : } -P D_{1,1}(\theta) d(\theta) \alpha$$



$$\text{ordre } k \geq 2 : \begin{cases} k=2p : (a^2 + \frac{c^2}{r})^{p-1} d(\theta) \alpha(t) [a_2(t) D_{2p}(\theta + \frac{t-T}{\epsilon}) + b_2(t) D_{2p}(\theta)] \\ k=2p+1 : (a^2 + \frac{c^2}{r})^p d(\theta) \alpha(t) P_{2p+1}(\theta) \end{cases}$$

Nous avons simplement utilisé l'expression de  $E_Q$ . Nous en déduisons le développement de (14)

$$\text{ordre } 0 : \boxed{\frac{dz_0}{dt} = Q \bar{d} \alpha, \quad z_0(T) = 0}$$

d'où  $z_0$

$$\text{Au premier ordre } R_0 = -2z_0 + \beta \frac{c^2}{r} Q^2 \quad (\text{si } R^\epsilon = \sum \epsilon^k R_k)$$

$$\begin{aligned} \text{et donc } \frac{dR_0}{dt} &= -2Q\bar{d}\alpha + 2\beta \frac{c^2}{r} Q(\frac{c^2}{r} QP - aQ - dP) + \frac{c^2}{r} \frac{d\beta}{dt} Q^2 \\ &= -2Q\bar{d} + 2\frac{c^2}{r} \beta P Q \bar{d} - 2\beta \frac{c^2}{r} \beta P Q \bar{d} + \frac{c^2}{r} Q^2 (\frac{d\beta}{dt} + 2\beta (\frac{c^2}{r} P - a)) \\ &= -2Q\bar{d} + \frac{c^2}{r} Q^2 = \frac{dR}{dt} \end{aligned}$$

L'identification précédente conduit donc à  $R$  comme terme du premier ordre de  $R^\epsilon$  et on retrouve le problème moyenné.

i) Ordre 1

$$\frac{\partial z_1}{\partial \theta} = Q(d - \bar{d})\alpha \quad \text{et donc } z_1 = Q D_1 \alpha + z_1(t)$$

et on a :

$$\frac{\partial z_1}{\partial t} + \frac{\partial \beta}{\partial \theta} + \frac{\partial \gamma}{\partial \theta} + P D_1(\theta) d(\theta) \alpha(t) = 0 \quad \text{et donc, en moyenne en } t$$

$$\frac{dz_1}{dt} = 0 \quad z_1(T) = z_1(T) = 0 \quad \text{et donc}$$

$$\boxed{z_1 = Q \alpha D_1(\theta)} \quad \text{et donc } R_1 = -2z_1 - 2\beta \frac{c^2}{r} Q P D_1$$

ii) Ordre 2 (initialisation de la récurrence)

Malheureusement, la variable  $r$  intervient, et comme variable indépendante si on cherche à résoudre le problème pour  $T$  quelconque. Naturellement, nous aurions pu effectuer la même démarche lors de l'identification de  $E_Q$ ; nous avons profité du fait qu'une forme a priori était disponible

les conditions finales seront donc interprétées comme des conditions le long de  $\Theta = \tau$  (d'où  $T = t$ )

Noté: les primitives  $\Pi$  le seront par rapport à  $\Theta$ ;

Avant de poursuivre, nous allons effectuer certaines dérivations qui s'avéreront utiles par la suite. Nous avons:

$$\frac{d\alpha}{dt} = -\frac{c^2}{r} (P\alpha - \beta)$$

$$\frac{d(\alpha P)}{dt} = -2\alpha(aP + 1) + 1 = 1 - 2b_2\alpha$$

$$\frac{d\beta}{dt} = 2\alpha - 1 + 2a\beta$$

$$\frac{d(cste)}{dt} = 0$$

(1)

$$\frac{d(\alpha Q)}{dt} = \frac{c^2}{r} \beta Q - \alpha(aQ + P\bar{d})$$

$$\frac{d(\beta Q)}{dt} = Q\alpha + a\beta Q - \bar{d} \frac{r}{c^2} (1 - \alpha)$$

(2)

Les encadrés précisent les espaces stables par dérivation. Nous désignerons par  $M_1$  et  $M_2$  les matrices de dérivations associés aux cadres 1 et 2

Revenons à  $Z^E$ :

Nous avons donc:

$$\frac{\partial Z_1}{\partial t} = D_1(\Theta) \frac{d(\alpha Q)}{dt} = D_1 \left[ \frac{c^2}{r} \beta Q - \alpha(aQ + P\bar{d}) \right]$$

$$= -\frac{\partial S_2}{\partial \Theta} - \frac{\partial \gamma_2}{\partial \Theta} + P D_1 d(\Theta) \alpha(t) ;$$

Après moyenne en  $\tau$  nous avons donc:

$$\frac{\partial \delta_2}{\partial \theta} = D_1 Q \left( \alpha a - \frac{c^2}{r} \beta \right) + D_1 \alpha \bar{D} + L_1 \bar{D} \alpha$$

et donc 
$$\delta_2 = D_2 Q \left( \alpha a - \frac{c^2}{r} \beta \right) + L_2 \alpha \bar{D}$$

de plus: 
$$\frac{\partial \gamma_2}{\partial \theta} = 0 \text{ donc } \gamma_2 = 0 \text{ car } \gamma_2 \text{ est de moyenne nulle}$$

Nous pouvons entamer la récurrence comme suit, en tenant compte de la parité de l'ordre.

iii) Ordre  $2p-2$ ,  $p \geq 1$

On suppose  $\delta_{2p-2}$  et  $\gamma_{2p-2}$  connus (vrai pour  $p=2$ ) Nous avons:

$$\frac{\partial \gamma_{2p-2}}{\partial t} + \frac{d\mu}{dt} \frac{\partial \delta_{2p-2}}{\partial t} + \frac{\partial \delta_{2p-2}}{\partial t} + \frac{\partial \gamma_{2p-1}}{\partial t} + \frac{\partial \delta_{2p-1}}{\partial \theta} + \frac{\partial \gamma_{2p-1}}{\partial \theta} =$$

$$\left( a^2 + \frac{c^2}{r} \right)^{2p-2} d(\theta) [\alpha(t) D_{2p-2}(z) + b_2 D_{2p-2}(\theta)]$$

d'où 
$$\frac{d\mu}{dt} \frac{\partial \delta_{2p-2}}{\partial t} + \frac{\partial \delta_{2p-2}}{\partial t} + \frac{\partial \delta_{2p-1}}{\partial \theta} = \left( a^2 + \frac{c^2}{r} \right)^{2p-2} d(\theta) \alpha(t) b_2 D_{2p-2}(\theta)$$

(moyenne en  $\tau$ )

$$\frac{d\mu}{dt} \frac{\partial \delta_{2p-2}}{\partial t} + \frac{\partial \gamma_{2p-2}}{\partial t} = \left( a^2 + \frac{c^2}{r} \right)^{2p-2} \alpha(t) [a_2 \bar{d} D_{2p-2}(\tau) + b_2 M_{2p-2}]$$

(moyenne en  $\theta$ )

$$\frac{\partial \mu}{\partial t} \frac{\partial \delta_{2p-2}}{\partial t} = \left( a^2 + \frac{c^2}{r} \right)^{2p-2} \alpha(t) b_2(t) M_{2p-2}$$

$$\frac{\partial \gamma_{2p-2}}{\partial t} = \left( a^2 + \frac{c^2}{r} \right)^{2p-2} \alpha(t) a_2(t) \bar{d} D_{2p-2}(\tau)$$

$$\frac{\partial \delta_{2p-2}}{\partial t} + \frac{\partial \delta_{2p-1}}{\partial \theta} = \left( a^2 + \frac{c^2}{r} \right)^{2p-2} \alpha(t) b_2(t) [d D_{2p-2} - M_{2p-2}]$$

$$\frac{\partial \gamma_{2p-2}}{\partial t} + \frac{\partial \gamma_{2p-1}}{\partial \theta} = \left( a^2 + \frac{c^2}{r} \right)^{2p-2} (d(\theta) \bar{d} \alpha(t) a_2(t) D_{2p-2}(\tau))$$

et donc :

$$\begin{aligned}\mu_{2p-2} &= \left(a^2 + \frac{c^2}{r}\right)^{2p-2} B(t) + r(\mu) \\ \delta_{2p-1} &= \left(a^2 + \frac{c^2}{r}\right)^{2p-2} \alpha b_2 \Delta_{2p-2} - \Pi \left( -\frac{\partial \delta_{2p-1}}{\partial t} \right) \\ \nu_{2p-2} &= \left(a^2 + \frac{c^2}{r}\right)^{2p-2} A(t) \bar{d} D_{2p-2}(\tau) + G(\tau) \\ \gamma_{2p-1} &= \left(a^2 + \frac{c^2}{r}\right)^{2p-2} D_1(\theta) \alpha a_2 D_{2p-2}(\tau) - \Pi \left( -\frac{\partial \nu_{2p-2}}{\partial t} \right)\end{aligned}$$

Remarquons que  $\gamma_{2p-1}$  est de moyenne nulle en  $\theta$ , et que  $\partial \gamma_{1p-1} / \partial \theta$  nous détermine  $\gamma_{2p-1}$  de manière unique; de même pour  $\delta_{2p-1}$ .

La condition finale:  $\mu_{2p-2}(T) + \delta_{2p-2}(T, \theta) + \gamma_{2p-2}(T, \theta, \theta) + \nu_{2p-2}(T, \theta) = 0$  nous donne:

$$cte(\mu) + \delta_{2p-2}(T, \theta) + \gamma_{2p-2}(T, \theta, \theta) + G(\theta) = 0 \text{ d'où, en moyenne:}$$

$$cte(\mu) = - \overline{\gamma_{2p-2}(T, \dots)}$$

$$G(\tau) = - \delta_{2p-2}(T, Z) - \gamma_{2p-2}(T, Z, Z) + \overline{\gamma_{2p-2}(T, \dots)}$$

$$\text{avec } \overline{\gamma_{2p-2}(T, \dots)} = \frac{1}{\omega} \int_0^\omega \gamma_{2p-2}(T, \theta, \theta) d\theta =$$

Nous connaissons donc  $\delta_{2p-2}$ ,  $\mu_{2p-2}$ ,  $\gamma_{2p-2}$ ,  $\nu_{2p-2}$  et  $\gamma_{2p-1}$ ,

$\delta_{2p-2}$  (sous réserve de dérivabilité, dérivabilité que nous prouverons par la suite)

iv) Nous pouvons maintenant passer à l'ordre  $2p-1$

$$\begin{aligned}\frac{d\mu_{2p-1}}{dt} + \frac{\partial \delta_{2p-1}}{\partial t} + \frac{\partial \gamma_{2p-1}}{\partial t} + \frac{\partial \nu_{2p-1}}{\partial t} + \frac{\partial \delta_{2p}}{\partial \theta} + \frac{\partial \gamma_{2p}}{\partial \theta} = \\ - \left(a^2 + \frac{c^2}{r}\right)^{2p-1} d(\theta) \alpha(t)^p D_{2p-1}(\theta)\end{aligned}$$

$$\text{donc } \frac{\partial \mu_{2p-1}}{\partial t} + \frac{\partial \delta_{2p-1}}{\partial t} + \frac{\partial \delta_{2p}}{\partial \theta} = - (a^2 + \frac{c^2}{r})^{p-1} d(\theta) \alpha(t) P(t) D_{2p-1}(\theta)$$

$$\text{et } \frac{\partial \mu_{2p-1}}{\partial t} + \frac{\partial \nu_{2p-1}}{\partial t} = 0 \quad (\text{par moyennes successives})$$

$$\begin{aligned} \text{donc } \quad & \frac{\partial \mu_{2p-1}}{\partial t} = 0 \quad \frac{\partial \nu_{2p-1}}{\partial t} = 0 \\ & \frac{\partial \delta_{2p-1}}{\partial t} + \frac{\partial \delta_{2p}}{\partial \theta} = - (a^2 + \frac{c^2}{r})^{p-1} d(\theta) \alpha(t) P(t) D_{2p-1}(\theta) \\ & \frac{\partial \gamma_{2p-1}}{\partial t} + \frac{\partial \gamma_{2p}}{\partial \theta} = 0 \end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned} \mu_{2p-1} &= \text{cte} \quad , \quad \nu_{2p-1} = G(r) \\ \delta_{2p} &= - (a^2 + \frac{c^2}{r})^{p-1} \alpha P \Delta_{2p-1}(\theta) - \pi (\frac{\partial \delta_{2p-1}}{\partial t}) \\ \gamma_{2p} &= - \pi (\frac{\partial \gamma_{2p-1}}{\partial t}) \end{aligned}$$

Les conditions finales donnent:

$$\mu_{2p-1} + \delta_{2p-1}(T, \theta) + \gamma_{2p-1}(T, \theta, \theta) + G(\theta) = 0$$

$$\text{et donc } \mu_{2p-1} = - \overline{\gamma_{2p-1}(T, \dots)}$$

$$G(r) = - \delta_{2p-1}(T, r) - \gamma_{2p-1}(T, r, r) + \overline{\gamma_{2p-1}(T, \dots)}$$

Ce qui nous détermine  $\mu_{2p-1}$ ,  $\nu_{2p-1}$  et  $\delta_{2p}$ ,  $\gamma_{2p}$ .

La récurrence précédente nous permet donc d'identifier la suite des  $\mu_k$ ,  $\delta_k$ ,  $\gamma_k$ ,  $\nu_k$ .

Néanmoins, nous pouvons expliciter celle-ci un peu plus en vue, notamment, d'étudier la convergence de la série  $E_k$ .

$$\text{Nous posons } A_k(t) = \frac{d^k}{dt^k} (\alpha a_2) : A_0 = \alpha a_2, \quad A = A_{-1}$$

Nous allons montrer que:

$$(15) \quad \gamma_{2p+1} = \sum_{i=0}^{p-1} \left(a^2 + \frac{c}{r}\right)^{2p-1-i} D_{2i+1}(\theta) \Lambda_{2i}(t) D_{2(p-i)}(\tau)$$

( $p > 1$ )

$$\text{et } (16) \quad \gamma_{2p} = - \sum_{i=1}^{p-1} \left(a^2 + \frac{c}{r}\right)^{2p-1-i} D_{2i}(\theta) \Lambda_{2i-1}(t) D_{2(p-i)}(\tau)$$

( $p \geq 2$ )

En effet, nous avons  $\gamma_2 = 0$  et donc

$$\gamma_3 = D_1(\theta) \alpha_2 D_2(\tau)$$

$$\text{et donc } \gamma_4 = - \Pi \left( \frac{\partial}{\partial t} (\gamma_3) \right)$$

$$= - D_2(\theta) \Lambda_1(t) D_2(\tau)$$

$$= - \sum_{i=1}^1 \left(a^2 + \frac{c}{r}\right)^{2p-1-i} D_{2i}(\theta) \Lambda_{2i-1}(t) D_{2(2-i)}(\tau)$$

Si (16) est vraie pour  $p$  (en l'occurrence,  $p=2$  au départ) alors:

$$\begin{aligned} \gamma_{2p+1} &= \left(a^2 + \frac{c}{r}\right)^{2p-1} D_1(\theta) \alpha_2 D_{2p}(\tau) \\ &+ \Pi \left( \sum_{i=1}^{p-1} \left(a^2 + \frac{c}{r}\right)^{2p-1-i} D_{2i}(\theta) \Lambda_{2i}(t) D_{2(p-i)}(\tau) \right) \\ &= \left(a^2 + \frac{c}{r}\right)^{2p-1} D_1(\theta) \alpha_2 D_{2p}(\tau) \\ &+ \sum_{i=1}^{p-1} \left(a^2 + \frac{c}{r}\right)^{2p-1-i} D_{2i+1}(\theta) \Lambda_{2i}(t) D_{2(p-i)}(\tau) \\ &= \sum_{i=1}^{p-1} \left(a^2 + \frac{c}{r}\right)^{2p-1-i} D_{2i+1}(\theta) \Lambda_{2i}(t) D_{2(p-i)}(\tau), \end{aligned}$$

ce qui vérifie (15). Alors:

$$\begin{aligned} \nu_{2(p+1)} &= -i \left( -\frac{\partial \gamma_{2p+1}}{\partial t} \right) \\ &= - \sum_{i=0}^{p-1} \left( a^2 + \frac{c^2}{r} \right)^{2p-1-i} D_{2i}(\theta) A_{2i} D_{2(p-1)}(\tau) \\ &= - \sum_{i=0}^p \left( a^2 + \frac{c^2}{r} \right)^{2p+1-1-i} D_{2i}(\theta) A_{2i-1} D_{2(p-1)}(\tau) \end{aligned}$$

d'où la récurrence.

Nous pouvons maintenant reconsidérer les moyennes de  $\gamma_k(T, \theta, \theta)$ .

Par intégration par parties, nous avons

$$\begin{aligned} \frac{1}{\omega} \int_0^\omega D_{2i}(\theta) D_{2(p-1)}(\theta) d\theta &= M_{2p} \\ \text{et} \quad \frac{1}{\omega} \int_0^\omega D_{2i+1}(\theta) D_{2(p-1)}(\theta) d\theta &= 0 \end{aligned}$$

Nous pouvons maintenant expliciter un peu plus  $\mu_k$ ,  $\delta_k$ ,  $\gamma_k$ ,  $\nu_k$ .

$$\begin{aligned} \mu_{2p} &= M_{2p} \left\{ \left( a^2 + \frac{c^2}{r} \right)^{2p-1} B(t) + \sum_{i=1}^{p-1} \left( a^2 + \frac{c^2}{r} \right)^{2p-1-i} A_{2i-1}(T) \right\} \\ \delta_{2p} &= - \left( a^2 + \frac{c^2}{r} \right)^{2p-1} \alpha(t) P(t) \Delta_{2p-1}(\theta) - \pi \left( -\frac{\partial \delta_{2p-1}}{\partial t} \right) \\ \nu_{2p} &= \left( a^2 + \frac{c^2}{r} \right)^{2p-1} A(t) \overline{DD}_{2p}(\tau) - \delta_{2p}(T; \tau) \\ &\quad + \sum_{i=1}^{p-1} \left( a^2 + \frac{c^2}{r} \right)^{2p-1-i} A_{2i-1}(T) \left[ D_{2i}(\tau) D_{2(p-1)}(\tau) - M_{2i} \right] \\ \gamma_{2p} &= - \sum_{i=1}^{p-1} \left( a^2 + \frac{c^2}{r} \right)^{2p-1-i} D_{2i}(\theta) A_{2i-1}(t) D_{2(p-1)}(\tau) \end{aligned}$$

$$\mu_{2p+1} = 0$$

$$\delta_{2p+1} = \left(a^2 + \frac{c^2}{r}\right)^{2p-1} \alpha(t) b_2(t) \Delta_{2p} - \pi \left(\frac{\partial \delta_{2p}}{\partial t}\right)$$

$$\nu_{2p+1}(t, \tau) = \nu_{2p+1}(\tau) = -\delta_{2p+1}(T, \tau) - \gamma_{2p+1}(T, \tau, \tau)$$

$$\gamma_{2p+1}(t, \Theta, \tau) = \sum_{i=0}^{p-1} \left(a^2 + \frac{c^2}{r}\right)^{2p-1-i} D_{2i+1}(\Theta) A_{2i}(t) D_{2(p-i)}(\tau)$$

Il nous reste d'une part à prouver la dérivabilité des  $\delta_k$  en  $t$ , d'autre part à étudier la convergence de la série.



### c) Etude des $\delta_k$

La récurrence  $\delta_k \rightarrow \delta_{k+1}$  étant affine, nous allons étudier la solution particulière pour  $\bar{d}=0$  (donc  $Q=0$  et  $\delta_2=0$ ) puis étudier la solution homogène. En fait, vu les valeurs initiales ( $\delta_2$ ) définies implicitement par des équations différentielles linéaires à second membre  $C^\infty$  (en  $t$ ), on voit bien que  $\delta_k$  sera de classe  $C^\infty$ , et la question de la dérivation ne se pose pas. Néanmoins une étude des  $\delta_k$  nous aidera pour la question de la convergence.

Le fait qu'on construise  $\delta_k$  à partir de solutions d'équations différentielles va nous permettre d'explicitier un peu plus la récurrence.

#### 1) Etude lorsque $d=0$ (donc $Q=0$ )

Montrons que  $\delta_k$  est de la forme:

$$\delta_k(t, \theta) = c_k^1(\theta) + c_k^2(\theta)\alpha + c_k^3(\theta)\beta + c_k^4(\theta)\alpha\beta$$

En effet :  $\delta_2 = -\frac{1}{2} (D_1^2 + M_2) \alpha\beta$

donc :  $c_2^1 = c_2^2 = c_2^3 = c_2^4 = 0$  ,  $c_2^4 = -\frac{1}{2} (D_1^2 + M_2)$

Supposons ceci vrai pour  $k=2p$  (vérifié pour  $p=1$ )

$$\frac{\partial \delta_{2p}}{\partial t} = c_{2p}^2 \left[ -\frac{c^2}{r} (\alpha\beta - \beta) \right] + c_{2p}^3 [2\alpha - 1 + 2a\beta] + c_{2p}^4 [1 - 2\alpha - 2a\alpha\beta]$$

$$= [-c_{2p}^3 + c_{2p}^4] + \alpha [2c_{2p}^3 - 2c_{2p}^4]$$

$$+ \beta \left[ \frac{c^2}{r} c_{2p}^2 + 2a c_{2p}^3 \right] + \alpha\beta \left[ -\frac{c^2}{r} c_{2p}^2 - 2a c_{2p}^4 \right]$$

donc  $\delta_{2p+1} = - (a\beta + 1) \alpha \left( a^2 + \frac{c^2}{r} \right) \Delta_{2p}(\theta) - n \left( \frac{\partial \delta_{2p}}{\partial t} \right)$  qui est de

la forme requise Plus précisément on a :

$$c_{2p+1}^1 = \pi(-c_{2p}^4 + c_{2p}^3)$$

$$c_{2p+1}^2 = - (a^2 + \frac{c}{r})^{2p-1} \Delta_{2p} + 2\pi[c_{2p}^4 - c_{2p}^3]$$

$$c_{2p+1}^3 = - \pi [\frac{c}{r} c_{2p}^2 + 2a c_{2p}^3]$$

$$c_{2p+1}^4 = - a(a^2 + \frac{c}{r})^{2p-1} \Delta_{2p} + \pi[\frac{c}{r} c_{2p}^2 + 2a c_{2p}^4]$$

et de même  $s_{2p+2} = (a^2 + \frac{c}{r})^{2p} \alpha p \Delta_{2p+1} - \pi(\frac{\partial s_{2p+1}}{\partial t})$

d'où

$$c_{2p+2}^1 = \pi(c_{2p+1}^3 - c_{2p+1}^4)$$

$$c_{2p+2}^2 = - 2\pi(c_{2p+1}^3 - c_{2p+1}^4)$$

$$c_{2p+2}^3 = - \pi(\frac{c}{r} c_{2p+1}^2 + 2a c_{2p+1}^3)$$

$$c_{2p+2}^4 = - (a^2 + \frac{c}{r})^{2p} \Delta_{2p} + \pi[\frac{c}{r} c_{2p+1}^2 + 2a c_{2p+1}^4]$$

Or  $\|\Delta_k\| < M_\Delta \omega^k$

et les relations de récurrence assurant que

$$|c_k^i| < m_c M_c^k \omega^k$$

avec  $M_c = \sup (\frac{c}{r} + 2a, 2, \sqrt{a^2 + \frac{c^2}{r}})$

La série  $\sum_{k=0}^\infty s_k(t, \theta)$  converge donc uniformément pour

$$\omega M_c \epsilon < 1$$

ii) Récurrence homogène

Soit  $s_{-k}$  la suite définie précédemment ( $\bar{\delta}=0$ )

et Soit  $g(t, \theta) = D_2(\theta) Q[\alpha a - \frac{c}{r} \beta]$

alors  $\delta_2 = g + \delta_2$

Donc pour  $k \geq 2$   $\delta_k = (-1)^{k-2} \Pi^{k-2} \left( \frac{\partial^{k-2} g}{\partial t^{k-2}} \right) + \delta_k$

ou, si l'on préfère, en posant  $g_k = (-1)^k \Pi^k \left( \frac{\partial^k g}{\partial t^k} \right)$

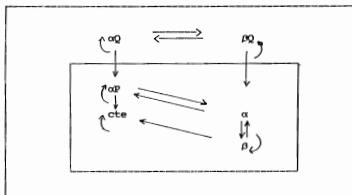
$$\delta_{k+2} = g_k + \delta_{k+2}$$

Il convient donc d'étudier la suite des  $g_k$

Nous allons montrer que  $g_k$  est de la forme:

$$g_k = d'_k(\theta) + d_k^2(\theta)\alpha + d_k^3(\theta)\beta + d_k^4(\theta)\alpha\beta + d_k^5(\theta)\alpha\beta$$

En effet on a le tableau de dérivations suivant:



Explicitons les récurrences pour étudier la convergence

$$k = 0 \quad d_0^1 = d_0^2 = d_0^3 = d_0^4 \quad . \quad d_0^5 = \alpha D_2(\theta) \quad d_0^6 = -\frac{c^2}{r} D_2(\theta)$$

Partons de  $g_k : g_{k+1} = -\Pi \left( \frac{\partial g_k}{\partial t} \right)$

$$\frac{\partial g_k}{\partial t} = d_k^2 \left[ -\frac{c^2}{r} (\alpha\beta - \beta) \right] + d_k^3 [2d-1+2\alpha\beta]$$

$$+ d_k^4 [1-2\alpha\beta-2\alpha] + d_k^5 \left[ \frac{c^2}{r} \beta\alpha - \alpha\alpha\beta - \beta\alpha\beta \right]$$

$$\begin{aligned}
 & + d_k^6 (\alpha Q + a \beta Q - M \frac{r}{c^2} + M \frac{r}{c^2} \alpha) \\
 = & [-d_k^3 + d_k^4 - M \frac{r}{c^2} d_k^6] + \alpha [2d_k^3 - 2d_k^4 + M \frac{r}{c^2} d_k^6] \\
 & + \beta [\frac{c^2}{r} d_k^2 + 2a d_k^3] + \alpha \beta [-\frac{c^2}{r} d_k^2 - 2a d_k^4 - M d_k^5] \\
 & + \alpha Q [-a d_k^5 + d_k^6] + \beta Q [\frac{c^2}{r} d_k^5 + a d_k^6]
 \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
 d_{k+1}^1 &= \Pi(d_k^3 - d_k^4 + M \frac{r}{c^2} d_k^6) \\
 d_{k+1}^2 &= \Pi(-2d_k^3 + 2d_k^4 - M \frac{r}{c^2} d_k^6) \\
 d_{k+1}^3 &= -\Pi(\frac{c^2}{r} d_k^2 + 2a d_k^3) \\
 d_{k+1}^4 &= \Pi(\frac{c^2}{r} d_k^2 + 2a d_k^4 + M d_k^5) \\
 d_{k+1}^5 &= \Pi(a d_k^5 - d_k^6) \\
 d_{k+1}^7 &= -\Pi(\frac{c^2}{r} d_k^5 + a d_k^6)
 \end{aligned}$$

Si  $M_d$  est la norme sup de la matrice implicitement écrite ci-dessus

alors  $|d_k^i| < \omega^k M_d^k$

donc on a convergence pour  $\omega M_d < 1$

conclusion: il existe  $\epsilon_0 > 0$  tel que pour  $\epsilon < \epsilon_0$   
la série  $\sum \epsilon^k \delta_k(t, \theta)$  converge uniformément

(la question de la dérivabilité étant implicitement réglée)

d) Etude de  $\gamma_k$  et convergence de  $E_Z$

L'étude de la suite  $\gamma_k$  nécessite d'étudier de plus près la suite des  $\lambda_k$ .  
 LA encore, on montre que  $\lambda_0$  appartient à un espace vectoriel de dimension finie stable par dérivation. En effet, on a :

$$\frac{d}{dt}(\alpha a_2) = a_2 \left( \frac{c^2}{r} \beta - \alpha \right) \quad \text{et} \quad \frac{d}{dt}(\beta a_2) = a_2 (\alpha + \beta)$$

donc  $\lambda_R = e_k^1 \alpha a_2 + e_k^2 \beta a_2$ , avec la récurrence :

$$\begin{aligned} \frac{d\lambda_k}{dt} &= e_k^1 \left( \frac{c^2}{r} \beta a_2 - \alpha a_2 \right) + e_k^2 (\alpha a_2 + \beta a_2) \\ &= \alpha a_2 (-ae_k^1 + e_k^2) + \beta a_2 \left( \frac{c^2}{r} e_k^1 + ae_k^2 \right) \end{aligned}$$

$$\text{donc } e_{k+1}^1 = -ae_k^1 + e_k^2$$

$$e_{k+1}^2 = \frac{c^2}{r} e_k^1 + ae_k^2$$

$$\text{donc si } M_e = \sup \left( \frac{c^2}{r} + a, \frac{c^2}{r} + 1 \right)$$

$$|\lambda_k| \leq m_e M_e^k$$

Nous pouvons maintenant estimer  $|\gamma_k|$ . En effet, on a

$$|D_k| \leq M_D \omega^k$$

$$\text{et donc } |\gamma_{2p}| \leq p \frac{M_e^{2(p-1)} - \left(a^2 + \frac{c^2}{r}\right)^{p-1}}{\frac{a^2 + \frac{c^2}{r}}{M_e} - \frac{2}{M_e}} M_0 \omega^{2p} m_e$$

On procède de même pour  $\gamma_{2p+1}$

donc

il existe  $\epsilon_0 > 0$  tel que pour  $\epsilon < \epsilon_0$  la série des  $\epsilon^k \gamma_k$  converge uniformément. De la convergence des séries en  $\delta_k$ ,  $\gamma_k$ , on déduit celle des séries en  $\mu_k$ ,  $\nu_k$ .

et le développement asymptotique converge, uniformément, pour  $\epsilon < \epsilon_0$ .

e) Conclusion sur  $\Gamma_z$

Il nous reste à justifier les dérivations sous le signe  $\int$ :  $\partial/\partial\theta$  et  $\partial/\partial r$  ne posent pas de problème et  $\partial/\partial r$  se déduit des équations définissant la récurrence.

Nous avons donc:

$$\frac{\partial \Gamma_z}{\partial t} + \frac{1}{\epsilon} \frac{\partial \Gamma_z}{\partial \theta} = Q^\epsilon d(\theta) \left(1 - \beta \frac{c^2}{r} P\right) \text{ et } \Gamma_z(T, \theta) = 0$$

$$\text{d'où } \Gamma_z = z^\epsilon$$

## 2.2.4 - Utilisation du développement précédent pour définir des feedbacks quasi-optimaux Doublement d'ordre d'approximation.

### 2.2.4.1 - Introduction

Nous allons utiliser des feedbacks déduits du développement de  $Q^e$  en  $LQ$ , et montrer qu'ils provoquent un doublement d'ordre d'approximation. Dans le cas non linéaire, nous mettrons en évidence, sous certaines hypothèses (vérifiées dans le cas qui nous occupe), le même phénomène, mais sur l'utilisation du contrôle optimal en boucle ouverte du problème moyenné. Ces deux résultats sont liés. En effet, de par la nature du problème (linéaire quadratique) nous connaissons la forme des feedbacks optimaux:  $w(x,t,\theta) = u(t,\theta)x + v(t,\theta)$ . Si on se restreint à ces feedbacks, le contrôle optimal des systèmes  $P^e$  et  $\bar{P}$  par les feedback  $w$  se ramène intrinsèquement au contrôle optimal en boucle ouverte des systèmes  $(P^e)_f$  et  $(\bar{P})_f$ :

$$(P^e)_f \begin{cases} \frac{dx}{dt} = (a+cu)x + d(\theta) + cv, & J(u,v) = \int_0^T (x^2 + x(ux+v)^2) dt \\ \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{e} \end{cases}$$

$$(\bar{P})_f \quad \frac{dx}{dt} = (a+c\bar{u})x + \bar{d} + c\bar{v}, \quad \bar{J}(u,v) = \int_0^T (x^2 + x(\bar{u}^2 + 2\bar{u}\bar{v}x + \bar{v}^2))$$

Du fait de la linéarité on a  $(\bar{P})_f = (\bar{P}^e)_f$ , et donc extraire un feedback de  $P$  pour l'utiliser dans  $P^e$  revient à extraire un contrôle en boucle ouverte de  $(P)_f$  pour l'utiliser dans  $(P^e)_f$ , sachant que l'avant-dernier est le problème moyenné du dernier.

Faisons ici cette parenthèse et revenons à notre sujet, en commençant par un lemme.

## 2.2.4.2 - Lemme

Soit la commande en boucle fermée :

$$u^e(x, t, \theta) = -\frac{c}{r} (Px + \chi(t, \theta, \epsilon))$$

avec  $\chi$  de classe  $C^1$  en  $t, \theta$

et  $X_t(s)$ ,  $s \in [t, T]$ ,

$$\begin{cases} \frac{dX}{ds} = aX + cu^e(x, t, \tau) + d(\tau) & , X(t) = x \\ \frac{d\tau}{ds} = \frac{1}{\epsilon} & , \tau(t) = \theta \end{cases}$$

$$\text{et } W^e(x, t, \theta) = \int_t^T [X^2(s) + r u^2(x(s), s, \tau(s))] ds$$

alors  $W^e(x, t, \theta)$  est de la forme :

$$W^e = p(t)x^2 + 2q^e(t, \theta)x + \rho^e(t, \theta)$$

autrement dit  $u^e$  engendre une fonction valeur  $W^e$  qui coïncide avec  $V^e$  sur les termes de degré 2 et 1 en  $x$ .

Preuve

$W^e$  vérifie :

$$\begin{cases} \frac{\partial W^e}{\partial t} + \frac{1}{\epsilon} \frac{\partial W^e}{\partial \theta} + \frac{\partial W^e}{\partial \theta} \left( x(a - \frac{c^2}{r}P) + d(\theta) - \frac{c^2}{r} \chi(t, \theta, \epsilon) \right) + \\ \quad + x^2 + \frac{c^2}{r} (Px + \chi)^2 = 0 \\ W^e(x, T, \theta) = 0 \end{cases}$$

avec  $W^e(x, t, \theta) = p^e(t, \theta)x^2 + 2q^e(t, \theta)x + \rho^e(t, \theta)$ .

et donc :

$$\frac{\partial p^e}{\partial t} + \frac{1}{\epsilon} \frac{\partial p^e}{\partial \theta} + 2p^e \left( a - \frac{c^2}{r}P \right) + 1 + \frac{c^2}{r} P^2 = 0, \quad p^e(T, \theta) = 0$$

d'où :



$$\frac{\partial}{\partial t} (p^e - p) + \frac{1}{\epsilon} \frac{\partial}{\partial \theta} (p^e - p) + 2(p^e - p)(a - \frac{c^2}{r} p) = 0, \quad p^e(T; \theta) = p(T) = 0$$

et nécessairement  $p^e = p$

d'autre part:

$$\begin{cases} \frac{\partial q}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial q}{\partial \theta} + q^e (a - \frac{c^2}{r} p) + p(d(\theta) - \frac{c^2}{r} \chi) + \frac{c^2}{r} p \chi = 0 \\ q^e(T, \theta) = 0 \end{cases}$$

d'où :

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{1}{\epsilon} \frac{\partial q}{\partial \theta} + q^e (a - \frac{c^2}{r} p) + p(d(\theta)) = 0, \quad q^e(T, \theta) = 0$$

et donc  $q^e = Q^e$

Notons que  $\rho^e$  vérifie alors:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{\epsilon} \frac{\partial \rho}{\partial \theta} + 2Q^e(d(\theta) - \frac{c^2}{r} \chi) + \frac{c^2}{r} \chi^2 = 0, \quad \rho^e(T, \theta) = 0$$

comme on a d'autre part:

$$\frac{\partial R}{\partial t} + \frac{1}{\epsilon} \frac{\partial R}{\partial \theta} + 2Q^e(d(\theta) - \frac{c^2}{r} (Q^e)^2) = 0, \quad R^e(T, \theta) = 0$$

on en déduit, qu'en posant  $\delta \rho = \rho^e - R^e$ ,  $\delta \rho$  vérifie:

$$\frac{\partial \delta \rho}{\partial t} + \frac{1}{\epsilon} \frac{\partial \delta \rho}{\partial \theta} + \frac{c^2}{r} (Q^e - \chi)^2 = 0, \quad \delta \rho(T, \theta) = 0,$$

équation qui ressemble beaucoup à (3)

En particulier, si nous posons:

$$z = \frac{1}{2} \left( \frac{r}{c^2} \delta \rho + \beta (Q^e - \chi)^2 \right),$$

nous avons:

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial t} + \frac{1}{\epsilon} \frac{\partial z}{\partial \theta} = \frac{r}{2c^2} \left( \frac{\partial \delta \rho}{\partial t} + \frac{1}{\epsilon} \frac{\partial \delta \rho}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{2} \left( 1 - 2\beta \left( \frac{c^2}{r} p - a \right) \right) (Q^e - \chi)^2 \\ + \frac{1}{2} \beta \left( \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{\epsilon} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) (Q^e - \chi)^2 = \end{aligned}$$

$$- \beta \left( \frac{c}{r} p - a \right) (Q^\epsilon - X)^2 + \frac{1}{2} \beta \left( \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{\epsilon} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) [(Q^\epsilon - X)^2], \quad z(T, \theta) = 0$$

#### 2.2.4.3 - Théorème (2.2) doublement d'ordre d'approximation

Soit  $\chi_k(t, \theta, \epsilon) = \Gamma_Q^k$ , où  $\Gamma_Q^k$  désigne la somme des  $(k+1)$  premiers termes définissant la série  $\Gamma_Q$ ; et soit  $W_k^\epsilon$  défini par  $\chi_k^\epsilon$  comme dans le lemme précédent. Alors il existe  $K > 0$ ,  $\epsilon_0 > 0$ , tels que pour  $\epsilon < \epsilon_0$ :

$$\sup_{\substack{x \in R \\ t \in [0, T] \\ \theta \in R}} |W_k^\epsilon(x, t, \theta) - v^\epsilon(x, t, \theta)| < K \epsilon^{2(k+1)}$$

On observe donc un doublement de l'ordre d'approximation.

#### Démonstration

Il nous suffit, d'après le lemme précédent, de montrer que

$$|\delta p| < K \epsilon^{2(k+1)} \quad \text{c'est-à-dire, de manière équivalente,}$$

$$|z| < K \epsilon^{2(k+1)} \quad \text{puisque :}$$

$$|Q^\epsilon - \chi_k^\epsilon|^2 < K' \epsilon^{2(k+1)}$$

$$\begin{aligned} \text{Or } \left( \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{\epsilon} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) [(Q^\epsilon - \chi_k^\epsilon)^2] &= 2(Q^\epsilon - \chi_k^\epsilon) \left( \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{\epsilon} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) [(Q^\epsilon - \chi_k^\epsilon)]^2 \\ &= 2(Q^\epsilon - \chi_k^\epsilon) \left( \left( \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{\epsilon} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \left( \sum_{i=k+1}^{\infty} \epsilon^i (a_i(t) D_i(\theta + \frac{T-t}{\epsilon}) + b_i(t) D_i(\theta)) \right) \right) \\ &= 2(Q^\epsilon - \chi_k^\epsilon) \sum_{i=k+1}^{\infty} \epsilon^i \left( \frac{da_i}{dt} D_i(\theta + \frac{T-t}{\epsilon}) + \frac{db_i}{dt} D_i(\theta) + \frac{1}{\epsilon} b_i D_{i-1}(\theta) \right) \\ &= 2(Q^\epsilon - \chi_k^\epsilon) \left( \epsilon^k b_{k+1}(t) D_k(\theta) + \sum_{i=k+1}^{\infty} \epsilon^i \left( \frac{da_i}{dt} D_i(\theta + \frac{T-t}{\epsilon}) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{db_i}{dt} D_i(\theta) + b_{i+1} D_{i+1}(\theta) \right) \right) \\ &= 2(Q^\epsilon - \chi_k^\epsilon) (b_{k+1}(t) D_k(\theta) \epsilon^k - (a - \frac{c}{r} p) \sum_{i=k+1}^{\infty} \epsilon^i (a_i D_i(\theta + \frac{T-t}{\epsilon}) + \\ &\quad + b_{i+1} D_{i+1}(\theta))) \end{aligned}$$

$$= 2(\bar{Q}^\epsilon - \chi_K^\epsilon) b_{k+1}(\epsilon) \epsilon^k D_k(\Theta) + 2\left(\frac{C}{2} p - a\right)(\bar{Q}^\epsilon - \chi_K^\epsilon)^2 \quad \text{et donc :}$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} + \frac{1}{\epsilon} \frac{\partial z}{\partial \Theta} = \epsilon^k \beta(\bar{Q}^\epsilon - \chi_K^\epsilon) b_{k+1}(\epsilon) D_k(\Theta) \quad , \quad z(T, \Theta) = 0$$

$$\text{et donc } z(t, \Theta) = - \int_t^T \epsilon^k \beta(s) (\bar{Q}^\epsilon - \chi_K^\epsilon) \left(s, \Theta + \frac{s-t}{\epsilon}, \Theta + \frac{T-t}{\epsilon}\right)$$

$$\times b_{k+1}(s) D_k\left(\Theta + \frac{s-t}{\epsilon}\right) ds$$

$$= - \epsilon^k \sum_{i=k+1}^{\infty} \int_t^T \epsilon^i \beta(s) b_{k+1}(s) D_k\left(\Theta + \frac{s-t}{\epsilon}\right) [a_1(s) D_1\left(\Theta + \frac{T-t}{\epsilon}\right) + b_1(s) D_1\left(\Theta + \frac{s-t}{\epsilon}\right)]$$

$$= - \epsilon^k \sum_{i=k+1}^{\infty} \epsilon^i D_1\left(\Theta + \frac{T-t}{\epsilon}\right) \int_t^T \beta(s) b_{k+1}(s) D_k\left(\Theta + \frac{s-t}{\epsilon}\right) a_1(s) ds$$

$$= - \epsilon^k \sum_{i=k+1}^{\infty} \epsilon^i \int_t^T \beta(s) b_{k+1}(s) D_k\left(\Theta + \frac{s-t}{\epsilon}\right) D_1\left(\Theta + \frac{s-t}{\epsilon}\right) b_1(s) ds$$

et donc, à  $K \epsilon^{2(k+1)}$  pres,

$$z(t, \Theta) \sim - \epsilon^{2k+1} \left\{ D_{k+1}\left(\Theta + \frac{T-t}{\epsilon}\right) \int_t^T \beta(s) b_{k+1}(s) D_k\left(\Theta + \frac{s-t}{\epsilon}\right) a_{k+1}(s) ds \right.$$

$$\left. + \int_t^T \beta(s) b_{k+1}(s) D_k\left(\Theta + \frac{s-t}{\epsilon}\right) D_{k+1}\left(\Theta + \frac{s-t}{\epsilon}\right) b_{k+1}(s) ds \right.$$

$$= - \epsilon^{2k+1} \left\{ D_{k+1}\left(\Theta + \frac{T-t}{\epsilon}\right) \int_0^{T-t} \beta(s+t) b_{k+1}(s+t) D_k\left(\Theta + \frac{s}{\epsilon}\right) a_{k+1}(s+t) ds \right.$$

$$\left. + \int_0^{T-t} \beta(s+t) b_{k+1}(s+t) D_k\left(\Theta + \frac{s}{\epsilon}\right) D_{k+1}\left(\Theta + \frac{s}{\epsilon}\right) b_{k+1}(s+t) ds \right\}$$

Mais  $D_k$  et  $D_k D_{k+1}$  sont de moyenne nulle et le terme entre accolades peut être majoré par  $K \epsilon$  : d'où l'estimation proposée.

## 2.2.5 - Utilisation du contrôle optimal en boucle ouverte du problème moyenné

### 2.2.5.1 - Introduction

Nous allons démontrer ici par une autre méthode le résultat énoncé dans le cas non linéaire et dont nous avons parlé plus haut, à savoir que le contrôle optimal (en boucle ouverte) du problème moyenné est optimal à  $K\epsilon^2$  près dans le problème d'origine.

Cette commande est donnée par:

$$u(t) = -\frac{C}{r} (P(t)y(t) + Q(t)), \text{ avec :}$$

$$\frac{dy}{dt} = ay - \frac{C^2}{r} (Py + Q) + \bar{d} \quad , \quad y(0) = X(0)$$

Remarquons que dans ce cas (bien particulier) la commande optimale ne dépend pas de l'état rapide: la minimisation de l'Hamiltonien exclut d.

Nous allons donc prouver le théorème suivant:

### 2.2.5.2 - Théorème (2.3) doublement d'ordre d'approximation (boucle ouverte)

Soit  $u(t)$  la commande optimale du problème moyenné, pour la condition initiale  $X$ . Alors  $u$  engendre dans le problème  $(P^\epsilon)$  un coût optimal à  $K\epsilon^2$  près.

Démonstration

$$\begin{aligned} \text{Soit } x_2(t, \theta) &= \Pi \left( ax - \frac{c^2}{r} (P(t)y(t) + Q(t)) + d(\cdot) \right) (\theta) = x_2(\theta) \\ &= D_1(\theta) \end{aligned}$$

et  $x_1$  défini par:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= \left( \frac{1}{\omega} \int_0^\omega \frac{\partial}{\partial x} \left( ax - \frac{c^2}{r} (Py + Q) + d(\theta) \right) d\theta \right) x_1 \\ &\quad + \frac{1}{\omega} \int_0^\omega \frac{\partial}{\partial x} \left( ax - \frac{c^2}{r} (Py + Q) + d(\theta) \right) x_2(t, \theta) d\theta \\ &= ax_1 + \frac{a}{\omega} \int_0^\omega D_1(\theta) d\theta = ax_1 \\ x_1(0) + x_2(0, c) &= 0 \end{aligned} \right.$$

c'est-à-dire:

$$\frac{dx_1}{dt} = ax_1, \quad x_1(0) = -D_1(0) \quad \text{donc} \quad x_1(t) = -D_1(0)e^{at}$$

Nous savons que si  $x^e$  est la trajectoire commandée par

$$u(t) = -\frac{c}{r} (P(t)y(t) + Q(t)), \quad \text{cad} \quad \frac{dx}{dt} = ax - \frac{c^2}{r} (Py + Q) + d\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)$$

alors il existe  $k > 0$  tel que:

$$\sup_{t \in [0, T]} |x^e(t) - y(t) - \varepsilon x_2\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) - \varepsilon x_1(t)| \leq k\varepsilon^2$$

Notations:  $\approx$  signifiera: à  $k\varepsilon^2$  près.

$$\text{Nous avons donc } J^e(u) = \int_0^T [x^e(t)^2 + ru^2(t)] dt$$

$$\approx \int_0^T [y^2(t) + 2\varepsilon y(t)(x_1(t) + x_2\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)) + ru^2(t)] dt$$

$$\approx \int_0^T [y^2(t) + 2\varepsilon y(t)x_1(t) + ru^2(t)] dt \quad (\text{car } x_2 \text{ est de moyenne nulle})$$

$$= \int_0^T (y^2(t) + \frac{c^2}{k} (Py + Q)^2) dt + 2\epsilon \int_0^T y(t)x_1(t)$$

Soit  $q(t) = 2(Py + Q)$  l'état adjoint du problème moyenné:

$$\frac{dq}{dt} = - \frac{\partial H}{\partial x} = -aq - 2y$$

Nous avons donc  $2 \int_0^T y x_1 dt = - \int_0^T x_1 (aq + \frac{dq}{dt}) =$

$$x_1(0)q(0) + \int_0^T q ax_1 dt - \int_0^T q ax_1 dt = x_1(0)q(0) \\ = -D_1(0)q(0)$$

D'autre part,

$$\int_0^T (y^2 + \frac{c^2}{k} (Py + Q)^2) dt \quad \text{représente le coût optimal du}$$

problème moyenné, puisque  $u = - \frac{c}{k} (Py(t) + q)$  en est la commande optimale. On a donc:

$$J^\epsilon(u) \approx P(0)X^2 + 2Q(0)X + R(0) - 2\epsilon D_1(0)(P(0)X + Q(0)) \\ = P(0)X^2 + 2Q(0)X + R(0) + \epsilon(2Q_1(0)X + R_1(0)),$$

qui constitue la somme des deux premiers termes du développement de la fonction valeur en  $t = 0$ ,  $\Phi(0) = 0$  et vaut donc le coût optimal à  $k\epsilon^2$  près.

## 2.3 - Cas général homogène sans contrainte

### 2.3.1 - Présentation

Nous allons considérer maintenant le problème

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dX}{dt} = A(t, \Theta)X + B(t, \Theta)U \quad X \in \mathbb{R}^n, U \in \mathbb{R}^p, t \in [0, T] \\ \frac{d\Theta}{dt} = \frac{1}{\epsilon} \quad \Theta \in \mathbb{R} \end{array} \right.$$

$$\text{Minimise } \int_0^T [X'(s)Q(s)X(s) + U'(s)R(s)U(s)]ds$$

où A, B, Q, R sont des matrices bornées, continues en leurs arguments, A et B périodiques en  $\Theta$  de période  $\omega$ ,  $Q \geq 0$  et  $R \geq \beta Id$ ,  $\beta > 0$ , Q et R symétriques.

Pour simplifier, nous poserons  $G = A - BR^{-1}B'P_0$ , où  $P_0$  est la "fonction valeur" (modulo  $X'X$ ) du problème moyenné et nous supposerons A,  $BR^{-1}B'$  et Q analytiques en t [ou dérivables en t jusqu'à l'ordre nécessaire, de dérivées continues bornées]

### 2.3.2 - Développement de la fonction valeur

Nous avons donc  $V^\epsilon(X, t, \Theta) = X'P^\epsilon(t, \Theta)X$ , où nous cherchons à mettre  $P^\epsilon$

sous la forme

$$P_0(t) + \epsilon P_1(t, \Theta) + \int_{t=1}^{\infty} \epsilon^k P_k(t, \Theta, \tau) \Big|_{\tau = \Theta + \frac{\tau-t}{\epsilon}}$$

$P^\epsilon$  vérifie :

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial P^\epsilon}{\partial t} + \frac{1}{\epsilon} \frac{\partial P^\epsilon}{\partial \Theta} + P^\epsilon A + A' P^\epsilon + Q - P^\epsilon BR^{-1}B' P^\epsilon = 0 \\ P^\epsilon(T, \Theta) = 0 \end{array} \right.$$

En posant  $P_{k-1} = \int_{i=1}^{k-1} P_i BR^{-1} B' P_{k-1}$  pour  $k \geq 1$ , nous obtenons,

en reportant le développement espéré dans (1):

$$(2) \quad \begin{cases} \frac{dP_0}{dt} + \frac{\partial P_1}{\partial \theta} + A'P_0 + P_0 A + Q - P_0 BR^{-1} B' P_0 = 0 & P_0(T) = 0 \\ \frac{\partial P_1}{\partial t} + \frac{\partial P_2}{\partial \theta} + A'P_1 + P_1 A - P_0 BR^{-1} B' P_1 - P_1 BR^{-1} B' P_0 = 0 & P_1(T, \theta) = 0 \\ \frac{\partial P_k}{\partial t} + \frac{\partial P_{k+1}}{\partial \theta} + G'P_k + P_k G = P_{k-1} & P_k(T, \theta, \tau) = 0 \end{cases}$$

ceci pour tout  $t, \theta, \tau$  [pour tout  $\tau$  signifiant pour tout  $T$ ].

En utilisant les mêmes techniques que dans l'étude précédente, nous pouvons exhiber un développement asymptotique de  $P^\epsilon$ . Néanmoins, la complexité de la récurrence mise en oeuvre rend difficile l'étude de la convergence de la série. Nous nous contenterons de montrer que celle-ci définit une suite de développements asymptotiques de  $P^\epsilon$ , c'est-à-dire qu'on a:

$$\sup_{t, \theta} \left| P^\epsilon(t, \theta) - P_0(t) - \epsilon P_1(t, \theta) - \int_{k=2}^N \epsilon^k(t, \theta, \tau) \frac{T-t}{\epsilon} \right| \leq K_N \epsilon^N$$

Après moyenne en  $\theta$  du développement au premier ordre de l'équation d'Hamilton-Jacobi, nous avons:

$$(3) \quad \frac{dP_0}{dt} + \bar{A}'P_0 + P_0 \bar{A} + Q - \overline{P_0 BR^{-1} B' P_0} = 0 \quad P_0(T) = 0,$$

qui est l'équation d'Hamilton Jacobi du problème moyenné:

$$\frac{dX}{dt} = \bar{A}X + \bar{B}U, \quad \text{Min} \int_0^T (X'QX + \bar{U}'R\bar{U})dt$$

où  $U(t)$  est une fonction périodique de  $R$  des  $RP$ . Si nous admettons la légitimité du développement (ce que nous faisons ici), c'est-à-dire où nous supposons  $\|P^\epsilon - P_0\| < K\epsilon$ , nous pouvons aisément montrer que  $X'P_0X$  est la fonction valeur du problème moyenné. En effet, considérons  $v$  un contrôle optimal pour le problème moyenné avec instant initial  $t$  et condition initiale  $X$  ( $v$  est une application de  $[t, T]$  dans  $E_1$ ) nous pouvons supposer que  $v(t)$  est une fonction



périodique et que  $(t, \Theta) \rightarrow \{v(t)\}(\Theta)$  est continue, puisque nous savons dans le cas qui nous occupe qu'un tel contrôle optimal existe. Posons  $u^\epsilon(t) = \{v(t)\}(t/\epsilon)$  et posons  $J^\epsilon(t, x, u^\epsilon)$  le coût engendré par  $u^\epsilon$  dans le problème  $P^\epsilon(\Theta(0) = \Theta_0)$ ,  $W$  la fonction valeur du problème moyen,  $V^\epsilon(x, t, \Theta)$  la fonction valeur du problème  $P^\epsilon$ , et  $V_0$  le premier terme de son développement. Une étude trajectorielle nous apprend que :

$$W(x, t) \leq J^\epsilon(t, x, u^\epsilon) + k \epsilon$$

$$\leq V^\epsilon(x, t, \Theta_0) + k \epsilon$$

Or, par hypothèse sur le développement, nous avons :

$V^\epsilon(x, t, \Theta) \leq V_0(x, t) + k' \epsilon$  et donc, pour tout  $\epsilon$  dans un certain voisinage de 0,

$$W(x, t) \leq V_0(x, t) + (k + k') \epsilon \quad \text{d'où :}$$

$W(x, t) \leq V_0(x, t)$  ; comme  $V_0$  satisfait à l'équation d'Hamilton-Jacobi du problème moyen, nous en déduisons que  $W = V_0$ .

Cette démonstration, nous réserve d'existence et de régularité d'un contrôle optimal pour  $P$ , peut bien sûr se généraliser au cas non-linéaire.

De (2) et (3) nous déduisons :

$$\frac{\partial P}{\partial \Theta} + (A - \bar{A})' P_0 + P_0 (A - \bar{A}) - P_0 (B R^{-1} B' - \bar{B} R^{-1} \bar{B}') P_0 = 0$$

et donc :

$$P_1 = P_0 B (B R^{-1} B') P_0 - B(A)' P_0 - P_0 B(A') + P_1$$

où  $P_1$  ne dépend que de  $t$

Après moyenne de la seconde équation de (2) nous obtenons :

$$\frac{dP_1}{dt} + \bar{A}' P_1 - P_1 \bar{A} - P_0 \bar{B} R^{-1} \bar{B}' P_1 - P_1 \bar{B} R^{-1} \bar{B}' P_0 + P_0 \bar{A} \Pi(G) + \Pi(G)' P_0 = 0$$

$$P_1(T) = 0$$

car  $P_1(T, \Theta) = p_1(T)$ , puis de cette même équation nous déduisons  $s_2$  et  $\gamma_2$ , en reprenant les notations de l'exemple précédent:

$$P_K(t, \Theta, \tau) = \mu_K(t) + s_K(t, \Theta) + \gamma_K(t, \Theta, \tau) + v_K(t, \tau).$$

On vérifie par le même raisonnement que précédemment qu'on ne peut en général pas avoir  $\gamma_K = \gamma_K = 0$  [prendre  $A = -\sin \Theta \text{ Id}$ ,  $Q = \text{Id}$ ].

Si on pose

$$P_{K-1}(t, \Theta, \tau) = m_{K-1}(t) + d_{K-1}(t, \Theta) + g_{K-1}(t, \Theta, \tau) + n_{K-1}(t, \tau),$$

la récurrence à l'ordre  $k$  s'exprime comme suit:

$\gamma_K$  et  $s_K$  sont connus et

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\mu_K}{dt} + \mu_K \bar{G} + \bar{G}' \mu_K + \bar{s}_K \bar{G} + \bar{G}' \bar{s}_K = m_{K-1}, \\ \text{avec} \quad \mu_K(T) + \frac{1}{\omega} \int_0^\omega \gamma_K(T; \Theta; \Theta) d\Theta = \alpha \\ \\ s_{K+1} = -\Pi \left( \frac{\partial s_K}{\partial t} + (\mu_K + s_K)G + G'(\mu_K + s_K) - d_{K-1} \right) \\ \\ \frac{\partial v_K}{\partial t} + v_K \bar{G} + \bar{G}' v_K + \bar{\gamma}_K \bar{G} + \bar{G}' \bar{\gamma}_K = n_{K-1} \\ \text{avec} \quad \mu_K(T) + s_K(T, \Theta) + \gamma_K(T, \Theta; \Theta) + v_K(T, \Theta) = 0 \\ \\ \gamma_{K+1} = -\Pi \left( \frac{\partial \gamma_K}{\partial t} + (v_K + \gamma_K)G + G'(v_K + \gamma_K) - g_{K-1} \right) \end{array} \right.$$

où  $m_{K-1}$ ,  $d_{K-1}$ ,  $n_{K-1}$ ,  $g_{K-1}$  sont connus;

d'où  $\mu_K$ ,  $v_K$ ,  $s_{K+1}$  et  $\gamma_{K+1}$ , de manière unique; on vérifie

en particulier que ces matrices sont symétriques.

Cette récurrence ne nous servira d'ailleurs pas pour traiter les deux questions qui nous occupent.

### 2.3.3 - Validité du développement

Posons, pour  $\epsilon > 0$ ,

$$Z^\epsilon(t, \Theta) = \frac{1}{\epsilon^{k+1}} (P^\epsilon(t, \Theta) - P_0(t) - \epsilon P_1(t, \Theta) - \sum_{i=2}^k \epsilon^i P_i(t, \Theta; \Theta + \frac{T-t}{\epsilon}))$$

Nous allons montrer que  $Z^\epsilon$  est bornée. Pour cela, réécrivons l'équation satisfaite par  $P^\epsilon$ , compte tenu de (2) qui définit les  $P_i$ :

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial Z^\epsilon}{\partial t} + \frac{1}{\epsilon} \frac{\partial}{\partial \Theta} (Z^\epsilon - P_{k+1}) + Z^\epsilon A + A' Z^\epsilon - \frac{1}{\epsilon^{k+1}} \left( \sum_{i=1}^k \epsilon^i P_i \right) B R^{-1} B' \left( \sum_{j=1}^k \epsilon^j P_j \right) \\ + \frac{1}{\epsilon^{k+1}} \sum_{i=0}^{k-1} \epsilon^{i+1} R_i - Z^\epsilon B R^{-1} B' \left( \sum_{i=0}^k \epsilon^i P_i \right) - \left( \sum_{i=0}^k \epsilon^i P_i \right) B R^{-1} B' Z^\epsilon \\ - \epsilon^{k+1} Z^\epsilon B R^{-1} B' Z^\epsilon = 0 \\ \text{et } Z^\epsilon(T, \Theta) = 0 \end{aligned} \right.$$

On posera:

$$T^\epsilon = \frac{1}{\epsilon^{k+1}} \left( \left( \sum_{i=1}^k \epsilon^i P_i \right) B R^{-1} B' \left( \sum_{j=1}^k \epsilon^j P_j \right) - \sum_{i=0}^{k-1} \epsilon^{i+1} R_i \right),$$

qui est borné (par construction des  $R_i$ )

$$\text{et } S^\epsilon = A - B R^{-1} B' \left( \sum_{i=0}^k \epsilon^i P_i \right) \quad (\text{borné}),$$

$$C^\epsilon = -T^\epsilon + \frac{\partial P_{k+1}}{\partial t} + P_{k+1} S^\epsilon + S^{\epsilon'} P_{k+1} \quad (\text{borné})$$

$$\text{alors } \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial Z^\epsilon}{\partial t} + \frac{1}{\epsilon} \frac{\partial Z^\epsilon}{\partial \Theta} + Z^\epsilon S^\epsilon + S^{\epsilon'} Z^\epsilon - T^\epsilon - \epsilon^{k+1} Z^\epsilon B R^{-1} B' Z^\epsilon - \frac{1}{\epsilon} \frac{\partial P_{k+1}}{\partial \Theta} = 0 \\ (4) \quad Z^\epsilon(T, \Theta) = 0 \end{aligned} \right.$$

ou encore en posant  $Y^\epsilon = Z^\epsilon - P_{k+1}$ ,

$$(5) \quad \begin{cases} \frac{\partial Y}{\partial t} \epsilon + (S \epsilon' - \epsilon^{k+1} P_{k+1} B R^{-1} B') Y \epsilon + Y \epsilon (S \epsilon - \epsilon^{k+1} B R^{-1} B' P_{k+1}) \\ - \epsilon^{k+1} Y \epsilon B R^{-1} B' Y \epsilon + C \epsilon = 0 \\ Y \epsilon(T, \Theta) = 0 \end{cases}$$

Notons que  $Y \epsilon$  est solution de (5) si et seulement si  $P \epsilon$  est solution de l'équation d'Hamilton-Jacobi de  $P \epsilon$ , en particulier  $Y \epsilon$  est solution maximale de (5).  $X' Y \epsilon X$  est donc la fonction valeur du problème linéaire quadratique;

$$\frac{dX}{dt} = (S \epsilon - \epsilon^{k+1} B R^{-1} B' P_{k+1}) X + \epsilon^{k+1} B U, \quad \frac{d\Theta}{dt} = \frac{1}{\epsilon}$$

$$\text{Minimise } \int_0^T [X' C \epsilon X + \epsilon^{k+1} U' R U] dt$$

dont on voit par une étude directe que le coût optimal est borné.

Note: En traitant  $Y \epsilon$  par les perturbations régulières, on voit que  $X' Y \epsilon X$  est asymptote à:

$$\int_t^T x'(s) \left( -R_k + \frac{\partial P_{k+1}}{\partial t} + P_{k+1} G + G' P_{k+1} \right) x(s) ds$$

$$\text{avec } \frac{dx}{ds} = Gx, \quad x(t) = X, \quad \frac{d\Theta}{ds} = \frac{1}{\epsilon}, \quad \text{c'est-à-dire:}$$

$$- \int_0^T x' \frac{\partial P_{k+2}}{\partial \Theta} \left( s, \Theta_0 + \frac{s-t}{\epsilon} \right) x \, ds \quad \text{avec } \frac{dx}{ds} = Gx, \quad x(t) = X$$

ou encore, au premier ordre:

$$- \int_0^T y' \frac{\partial P_{k+2}}{\partial \Theta} \left( s, \Theta_0 + \frac{s-t}{\epsilon} \right) y \, ds \quad \text{avec } \frac{dy}{ds} = \bar{G}y, \quad y(t) = X;$$

$\frac{\partial P_{k+2}}{\partial \Theta}$  étant de moyenne nulle, on voit donc que  $X' Y \epsilon X$  est d'ordre

$k\epsilon$  et donc  $\left| Z \epsilon - P_{k+1} \right| \leq k\epsilon$  pour  $\epsilon$  petit, ce qui est cohérent avec la suite du développement.

### 2.3.4 - Doublement d'ordre d'approximation (boucle fermée)

Nous allons déduire du développement précédent des contrôles en boucle fermée engendrant dans  $P^\epsilon$  un doublement d'ordre d'approximation

Soit  $X^\epsilon(t, \theta)$  une matrice non symétrique, bornée lorsque  $t$  décrit  $[0, T]$ ,  $\theta$  décrit  $R$  et  $\epsilon$  décrit  $]0, 1[$ , périodique en  $\theta$  de période  $\omega$ , continue en  $t, \theta$ . A  $W^\epsilon_t$  et à l'entrer  $k$  nous associons la matrice:

$$W^{\epsilon, k}(t, \theta) = P_0(t) + \epsilon W^\epsilon_t(t, \theta) \quad \text{si } k = 0$$

$$W^{\epsilon, k}(t, \theta) = P_0(t) + \epsilon P_1(t, \theta) + \epsilon^2 W^\epsilon_t(t, \theta) \quad \text{si } k = 1$$

$$W^{\epsilon, k}(t, \theta) = P_0(t) + \epsilon P_1(t, \theta) + \sum_{i=2}^k \epsilon^i P_i(t, \theta, \theta + \frac{T-t}{\epsilon}) + \\ + \epsilon^{k+1} W^\epsilon_t, \quad \text{si } k \geq 2$$

et à  $W^{\epsilon, k}$  nous associons le contrôle en boucle fermée:

$$U^{\epsilon, k}(X, t, \theta) = -R^{-1} B W^{\epsilon, k}(t, \theta) X$$

Nous allons prouver le résultat suivant:

$U^{\epsilon, k}$  engendre dans le problème  $P^\epsilon$  un cout optimal à  $K \epsilon^{2(k+1)}$  près

Preuve

Afin de simplifier les écritures, nous omettrons de préciser, lorsque ce sera sans équivoque, les indices  $\epsilon$ , et  $k$  ( $k$  ordre d'approximation)

De manière général, le système commandé par  $U^{\epsilon, k}$  est décrit par:

$$\frac{dY}{ds} = (A - BR^{-1} B'W)Y, \quad Y(t) = X, \quad \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{\epsilon}, \quad \theta(t) = \theta_0$$

il engendre un coût:

$$X'Z^{\epsilon,k}(t, \Theta_Q)X = \int_0^T [Y'QY + Y'WBR^{-1}BWY]ds$$

$Z^{\epsilon,k}$  vérifie:

$$(6) \quad \frac{\partial Z}{\partial t} + \frac{1}{\epsilon} \frac{\partial Z}{\partial \Theta} + Z(A - BR^{-1}B'W) + (A' - WBR^{-1}B')Z \\ + Q + WBR^{-1}B'W = 0, \quad Z(T, \Theta) = 0$$

$$\text{Nous posons } Z^{\epsilon,k} = \frac{1}{\epsilon^{2(k+1)}} (Z^{\epsilon,k} - \sum_{i=0}^{2k+1} \epsilon^i P_i)$$

Pour prouver la véracité de la proposition, il suffit de montrer que  $Z^{\epsilon,k}$  est borné.

$Z^{2(k+1)}_Z$  vérifie:

$$(7) \quad \epsilon^{2(k+1)} \frac{\partial Z}{\partial t} + \epsilon^{2k+1} \frac{\partial Z}{\partial \Theta} + \sum_{i=0}^{2k+1} \epsilon^i \frac{\partial P_i}{\partial t} + \sum_{i=0}^{2k} \epsilon^i \frac{\partial P_{i+1}}{\partial \Theta} \\ + \epsilon^{2(k+1)} [ZA + A'Z - ZBR^{-1}B' \sum_{i=0}^k \epsilon^i P_i - \sum_{i=0}^k \epsilon^i P_{i+1} BR^{-1}B'Z] \\ - \sum_{i=0}^{2k+1} \sum_{j=0}^k \epsilon^{i+j} (P_i BR^{-1}B'P_j + P_j BR^{-1}B'P_i) + \sum_{i=0}^{2k+1} \epsilon^i (AP_i + A'P_i) \\ + \sum_{i=0}^k \sum_{j=0}^k \epsilon^{i+j} P_i BR^{-1}B'P_j - \epsilon^{2(k+1)} (ZBR^{-1}B'W + W' BR^{-1}B'Z) \\ - \sum_{i=0}^{2k+1} \epsilon^{i+k+1} (P_i BR^{-1}B'W + W' BR^{-1}B'P_i) + Q + \epsilon^{2(k+1)} W' BR^{-1}B'W \\ + \sum_{i=0}^k \epsilon^{i+k+1} (P_i BR^{-1}B'W + W' BR^{-1}B'P_i) = 0$$

Intéressons nous à la partie de l'équation précédente où

ni  $Z$  ni  $W$  n'interviennent. Elle peut s'écrire:

$$- \epsilon^{2k+1} \frac{\partial P_{2(k+1)}}{\partial t} + \sum_{i=0}^{2k+1} \epsilon^i \left( \frac{\partial P_i}{\partial t} + \frac{\partial P_{i+1}}{\partial \Theta} \right) - \sum_{i=0}^{2k+1} \sum_{j=0}^{2k+1} \epsilon^{i+j} P_i BR^{-1}B'P_j$$

$$+ \sum_{i=0}^{2k+1} \epsilon^{i+1} (A P_i + A' P_i) + \sum_{i=k+1}^{2k+1} \sum_{j=k+1}^{2k+1} \epsilon^{i+j} P_i B R^{-1} B' P_j + Q$$

compte tenu de (2), ceci est donc de la forme:

$$= \epsilon^{2k+1} \frac{\partial^2 P_{2(k+1)}}{\partial \Theta} + \epsilon^{2(k+1)} T_{k,1}^{\epsilon} \quad \text{où } T_{k,1}^{\epsilon} \text{ est une fonction bornée}$$

de  $\epsilon, t, \Theta$  sur  $[0,1] \times [0,T] \times R$  (continue)

Intéressons nous maintenant à la partie de l'équation précédent où  $W_R$  intervient mais pas  $Z$ . Elle peut s'écrire:

$$- \sum_{i=k+1}^{2k+1} \epsilon^{k+1} \epsilon^i (P_i B R^{-1} B' W_R + W_R B R^{-1} B' P_i) + \epsilon^{2(k+1)} W_R B R^{-1} B' W_R$$

et est donc de la forme  $\epsilon^{2(k+1)} T_{k,2}^{\epsilon}$  où  $T_{k,2}^{\epsilon}$  est une fonction

bornée de  $\epsilon, t, \Theta$  sur  $[0,1] \times [0,T] \times R$ , et continue.

Divisant (7) par  $\epsilon^{2(k+1)}$  nous obtenons donc:

$$\begin{aligned} \frac{\partial Z}{\partial t} + \frac{1}{\epsilon} \frac{\partial Z}{\partial \Theta} - \frac{1}{\epsilon} \frac{\partial^2 P_{2(k+1)}}{\partial \Theta} + Z(A - B R^{-1} B' \sum_{i=0}^k \epsilon^i P_i) \\ + (A - B R^{-1} B' \sum_{i=0}^k \epsilon^i P_i)' Z - \epsilon^{k+1} (Z B R^{-1} B' W_R + W_R B R^{-1} B' Z) \\ + T_k^{\epsilon} = 0, \quad Z(t, \Theta) = 0 \end{aligned}$$

$$\text{avec } T_k^{\epsilon} = T_{k,1}^{\epsilon} + T_{k,2}^{\epsilon}.$$

Comme dans l'étude précédente, on peut interpréter  $Z-P_2(k+1)$  comme l'intégrale d'un coût le long de trajectoires "rapidement oscillantes" et conclure au fait que  $Z$  est borné

### 2.3.5 - Doublement d'ordre d'approximation (boucle ouverte)

Considérons le problème moyenné:

$$\text{Minimiser } \int_0^T (X' Q X + U' R U) dt$$

Ce problème admet un contrôle optimal,  $v$ , où  $v(t)$  est une fonction périodique sur  $R$ . Nous allons montrer que  $v$  engendre dans  $P^e$  un coût optimal à  $K \epsilon^2$  près, par des techniques voisines de celles utilisées dans le cas non-linéaire.

Preuve

$$\text{Posons donc } \begin{cases} x^e : \begin{cases} \frac{dx^e}{dt} = A(t, \frac{t}{\epsilon}) x^e - B(t, \frac{t}{\epsilon}) R^{-1}(t) B'(t, \frac{t}{\epsilon}) P_o(t) y(t) \\ x(0) = X \end{cases} \\ y : \begin{cases} \frac{dy}{dt} = \bar{A}(t) y - \bar{B} R^{-1} \bar{B}'(t) P_o(t) y \\ y(0) = X \end{cases} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2(t, \theta) = \Pi(A - B R^{-1} B' P_o)(\theta) y(t) \\ x_1 : \frac{dx_1}{dt} = \bar{A} x_1 + \bar{A} x_2, \quad x_1(0) + x_2(0, 0) = 0 \end{cases}$$

Nous savons qu'il existe  $K > 0$  tel que:

$$|x(t) - y(t) - \epsilon x_1(t) - \epsilon x_2(t, \frac{t}{\epsilon})| \leq K \epsilon^2$$

soit, en notant  $\approx$  la phrase "égal à  $K \epsilon^2$  près"

$$x(t) \approx y(t) + \epsilon x_1(t) + \epsilon x_2(t, \frac{t}{\epsilon})$$

Posons encore  $q(t) = P_o(t) y(t)$  ;  $q$  vérifie:

$$\frac{dq}{dt} = -Qy - \bar{A}'q, \quad q(T) = 0$$

Enfin on posera  $L(X, U, t) = X' Q X + U' R U$  et  $u(t) = \{v(t)\}(\frac{t}{\epsilon})$

c'est à dire  $u^e(t) = -R^{-1}(t) B'(\frac{t}{\epsilon}) P_o(t) y(t)$



a) Développement du coût engendré dans  $P^e$

Nous avons :

$$\int_0^T x^e Q x^e dt \approx \int_0^T y' Q y dt + 2\epsilon \int_0^T [x_1 + x_2(t, \frac{t}{\epsilon})]' Q y dt$$

$x_2$  étant de moyenne nulle nous avons donc :

$$\int_0^T x^e Q x^e dt \approx \int_0^T y' Q y dt - 2\epsilon \int_0^T x_1'(t) (\frac{dq}{dt} + \bar{A}' q) dt$$

$\approx$  (après intégration par parties)

$$\int_0^T y' Q y dt - 2\epsilon x_2(0,0)q(0) + 2\epsilon \int_0^T q' \bar{A} x_2 dt$$

D'autre part, nous savons que :

$$\int_0^T y' P_0 B R^{-1} B' P_0 y dt \approx \int_0^T y' P_0 \overline{B R^{-1} B'} P_0 y dt - \epsilon X' P_0(0) \Pi (B R^{-1} B') (0,0) P_0(x) X$$

et donc :

$$J^e(u^e) = \int_0^T L(x^e(t), u^e(t), t) dt$$

$$\approx X' P_0(0) X - \epsilon X' P_0(0) \Pi (B R^{-1} B') (0,0) P_0(0) X - 2\epsilon x_2(0,0) \cdot q(0) + 2\epsilon \int_0^T q' \bar{A} x_2 dt$$

b) Comparaison avec le coût optimal

Nous savons que  $P^e(t, \theta) \approx P_0(t) + \epsilon S_1(t, \theta) + \epsilon p_1(t)$

où  $S_1$  est de moyenne nulle en  $\theta$ , avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dp_0}{dt} + \bar{A}' P_0 + P_0 \bar{A} + Q - P_0 \overline{B R^{-1} B'} P_0 = 0 \quad P_0(T) = 0 \\ S_1 = - \Pi (\bar{A}' P_0 + P_0 \bar{A} - P_0 \overline{B R^{-1} B'} P_0) \\ \frac{dp_1}{dt} + \bar{A}' p_1 + p_1 \bar{A} - P_0 \overline{B R^{-1} B'} p_1 - p_1 \overline{B R^{-1} B'} P_0 \end{array} \right.$$

Nous avons donc :

$$K'S_1(o,o)X = -2\pi(A' - P_O BR^{-1})(o,o)P_O(o)X$$

$$K'P_O(o)\pi(BR^{-1}B')(o,o)P_O(o)X$$

$$= -X_2(o,o).q(o) - KP_O(o)\pi(BR^{-1}B')(o,o)P_O X$$

Il nous reste donc à comparer :

$$2\epsilon \int_0^T q' \overline{AX_2} dt \quad \text{et} \quad \epsilon X'P_1(o)X$$

Or  $X'P_1(o)X$  peut être interprété comme le coût intégral :

$$\int_0^T z'(t) [P_O \overline{A\pi(G)} + \overline{A\pi(G)'} P_O] z(t) dt$$

le long de la trajectoire,

$$\frac{dz}{dt} = (\bar{A} - P_O BR^{-1}B')z, \quad z(o) = X,$$

c'est-à-dire le long de  $y$ , et donc :

$$\epsilon X'P_1(o)X = \epsilon \int_0^T y'(t) [P_O \overline{A\pi(G)} + \overline{A\pi(G)'} P_O] y(t) dt$$

$$= 2\epsilon \int_0^T q'(t) \overline{A\pi(G)} y(t) dt$$

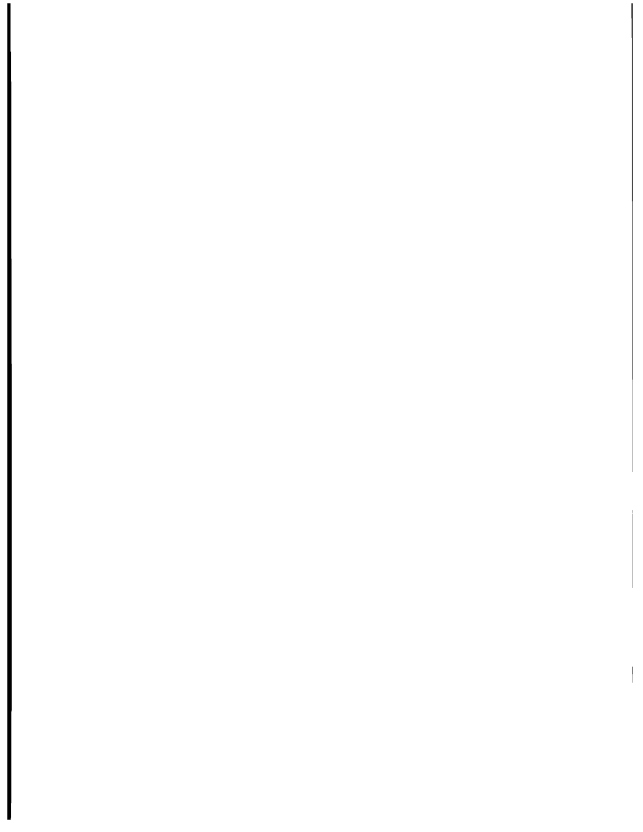
$$= 2\epsilon \int_0^T q'(t) \overline{A\pi(A-BR^{-1}B'P_O)} y(t) dt$$

$$= 2\epsilon \int_0^T q'(t) \overline{AX_2} dt. \quad \text{Nous avons donc :}$$

$$J^{\epsilon}(u^{\epsilon}) = X'[P_O(o) + \epsilon S_1(o,o) + \epsilon P_1(o)]X$$

$$= X'[P_O(o) + \epsilon P_1(o,o)]X$$

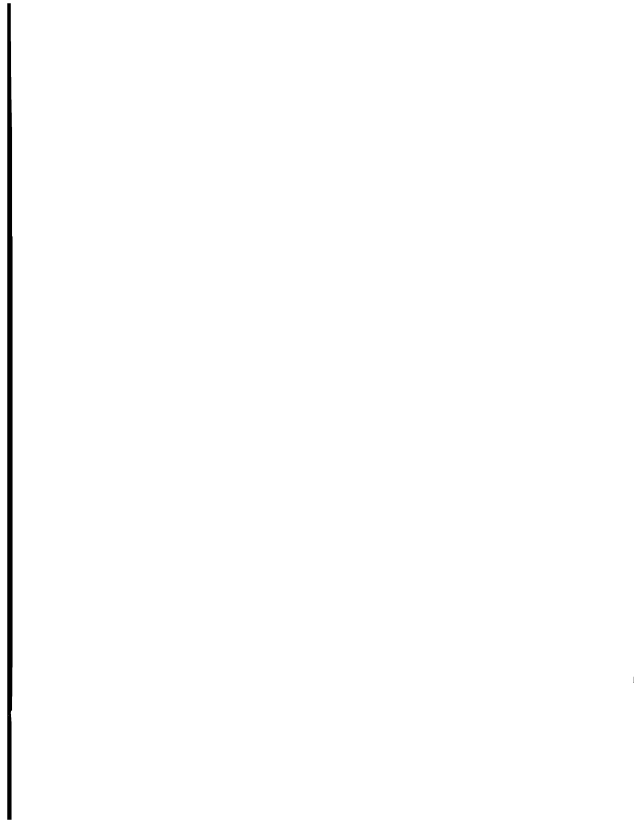
et  $u^{\epsilon}$  est donc optimal à  $K \epsilon^2$  près.



## CHAPITRE III

### DOUBLEMENT DE L'ORDRE D'APPROXIMATION

(CAS PERIODIQUE)



### III - DOUBLEMENT DE L'ORDRE D'APPROXIMATION

#### 3.1 - Introduction

Nous avons pu, dans le cas linéaire quadratique périodique (cf chapitre précédent), observer un doublement d'ordre d'approximation: c'est-à-dire que le contrôle optimal en boucle ouverte du problème moyenné engendrait dans le problème d'origine ( $P^\epsilon$ ) un coût optimal à la  $\epsilon^2$  près

Or c'est ce genre de résultat qui justifie dans la pratique, l'approximation, du problème perturbé par le problème limité (ici le problème  $P^\epsilon$  par le problème moyenné) lors du calcul d'un contrôle optimal (ou quasi-optimal). C'est pourquoi il nous a paru intéressant de le généraliser au cas non linéaire.

Le lecteur familier de la théorie des perturbations en contrôle optimal ne sera pas surpris par les hypothèses faites ou les techniques de démonstration utilisées: elles sont en effet inspirées de ce qu'on peut trouver en perturbations régulières et singulières [2]. En particulier on remarquera que la notion de problème tangent se généralise très bien au cas de l'averaging: elle fournirait d'ailleurs probablement les termes d'ordre supérieur.

#### 3.2 - Théorème (3.1) Minoration du coût de ( $P_\epsilon$ ) à l'ordre 2

##### 3.2.1 - Hypothèses

$$\begin{aligned} (H_1) : \text{ Soit } f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \times [0, T] \times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ (x, u, t, \theta) &\longrightarrow f(x, u, t, \theta) \\ L : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \times [0, T] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, u, t) &\longrightarrow L(x, u, t) \end{aligned}$$

et  $\epsilon \in ]0, 1[$ ,

où  $f, L$  sont continues, de classe  $C^2$  en  $x$  et  $u$ , de dérivées secondes Lipschitz en  $u$  et  $x$ ; Les dérivées premières et secondes de  $f$  en  $x$  et  $u$  sont bornées; les dérivées secondes de  $L$  sont bornées.

De plus  $f$  est périodique en  $\theta$  de période  $\omega$

Problèmes  
de contrôle

Le problème  $P_e$  est défini par

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = f(x(t), u(t), t, \frac{t}{e}), \quad x(0) = x_0, \quad u \in L^2(0, T, \mathbb{R}^p), \\ \\ \text{Minimiser } J_e(u) = \int_0^T L(x(s), u(s), s) ds \end{array} \right.$$

Le problème  $P_0$  est défini par

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = \frac{1}{\omega} \int_0^\omega f(x(t), u(t, \theta), t, \theta) d\theta, \\ \\ x(0) = x_0, \quad u \in L^2(0, T) \times (0, \omega), \mathbb{R}^p \\ \\ \text{Minimiser } J_0(u) = \int_0^T \frac{ds}{\omega} \int_0^\omega L(x(s), u(s, \theta), s) d\theta \end{array} \right.$$

Pour  $(x, p, v, t, \theta) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \times [0, T] \times \mathbb{R}$ ,

on pose  $H(p, x, v, t, \theta) = p \cdot f(x, v, t, \theta) + L(x, v, t)$

Hypothèses

(H<sub>2</sub>)

Le problème  $P_0$  admet une commande optimale  $u_0$ ,

définissant une trajectoire  $y$  et un état adjoint  $q$

(H<sub>3</sub>)

Il existe  $\beta > 0$  tel que, pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $v \in \mathbb{R}^p$ ,

$t \in [0, T]$ ,  $\theta \in \mathbb{R}$ ,

$$\frac{\partial^2 H}{\partial v^2}(q(t), x, v, t, \theta) > \beta \text{ Id}$$

(H<sub>4</sub>)

Pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $v \in \mathbb{R}^p$ ,  $t \in [0, T]$ ,  $\theta \in \mathbb{R}$ ,

$$\left[ \frac{\partial H}{\partial x} - \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial v} \left( \frac{\partial^2 H}{\partial v^2} \right)^{-1} \frac{\partial^2 H}{\partial v \partial x} \right] (q(t), x, v, t, \theta) > 0$$

(H<sub>5</sub>)

$f(y(t), u_0(t, \theta), t, \theta)$  et  $\frac{\partial H}{\partial x}(q(t), y(t), u_0(t, \theta), t, \theta)$

sont de classe  $C^1$  en  $t$ , de dérivée lipschitz en  $t$ .

Comme décrit en annexe, on notera  $g(\sigma, \cdot)$  ou  $g(\sigma)$  la moyenne en  $\Theta$  de  $g(\sigma, \Theta)$  si  $g$  est périodique en  $\Theta$ ; et  $\Pi(g(\sigma, \cdot))$  la primitive en  $\Theta$  de moyenne nulle de  $g(\sigma, \Theta) - g(\sigma)$ .

On posera  $x_2(t, \Theta) = \Pi(f(y(t), u_0(t, \cdot), t, \cdot))\Theta$

Pour  $u$  dans  $L^2([0, T], \mathbb{R}^p)$  on notera  $x$  la trajectoire associée.

On posera  $\tilde{x}(t) = x(t) - y(t) - \epsilon x_2(t, \frac{t}{\epsilon})$

et  $\tilde{u}(t) = u(t) - u_0(t, \frac{t}{\epsilon})$

On notera alors  $\rho(\lambda, \mu, t, \Theta)$  le point  $(y(t) + \lambda \mu (\epsilon x_2(t, \Theta) + \tilde{x}(t)), q(t),$

$u_0(t, \Theta) + \lambda \mu \tilde{u}(t, \Theta)$ , et on posera :

$$\rho_t(\lambda, \mu) = \rho(\lambda, \mu, t, \frac{t}{\epsilon})$$

$$\mathcal{H}_t(\lambda, \mu) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial v} \\ \frac{\partial^2 H}{\partial v \partial x} & \frac{\partial^2 H}{\partial v^2} \end{pmatrix} \quad (\rho(\lambda, \mu, t, \frac{t}{\epsilon}))$$

$$\mathcal{F}_t(\lambda, \mu) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial v} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial v \partial x} & \frac{\partial^2 F}{\partial v^2} \end{pmatrix} \quad (\rho(\lambda, \mu, t, \frac{t}{\epsilon}))$$

$$\mathcal{L}_t(\lambda, \mu) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 L}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial v} \\ \frac{\partial^2 L}{\partial v \partial x} & \frac{\partial^2 L}{\partial v^2} \end{pmatrix} \quad (\rho(\lambda, \mu, t, \frac{t}{\epsilon}))$$

On notera  $\sigma(t, \Theta) = (y(t), u_0(t, \Theta, t))$



### 3.2.2 - Énoncé

Pour  $u$  et  $\kappa$  comme précédemment, il existe  $\epsilon_0 > 0$  et  $k_0 > 0$  tels que, pour tout  $\epsilon \leq \epsilon_0$ , on ait :

$$\int_0^T L(x(t), u(t), t) dt \geq \int_0^T L(y(t), u_0(t, \frac{t}{\epsilon}), t) dt \\ + \epsilon \int_0^T \frac{\partial H}{\partial \kappa}(y(t), q(t), u_0(t, \cdot), t, \cdot) x_2(t, \cdot) dt - \epsilon q(0) \cdot x_2(0, 0) - k \epsilon^2$$

Note:  $\approx$  signifie: à la  $\epsilon^2$  près

### 3.2.3 - Démonstration

#### Lemme 1

Soit  $p_2(t, \theta) = - \Pi(\frac{\partial H}{\partial \kappa}(y(t), q(t), u_0(t, \cdot), t, \cdot))(\theta)$

Considérons le problème linéaire quadratique suivant :

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}(\sigma(t, \frac{t}{\epsilon}), \frac{t}{\epsilon})(z(t) + x_2(t, \frac{t}{\epsilon})) + \frac{\partial f}{\partial u}(\sigma(t, \frac{t}{\epsilon}), \frac{t}{\epsilon})v(t), \quad z(0) + x_2(0, 0) = 0$$

où  $v$  est dans  $L^2(0, T, \mathbb{R}^p)$  ; Minimiser :

$$J(v) = \int_0^T [\frac{1}{2}(z'(t), v'(t)) \frac{\partial f}{\partial \kappa}(0, 0)(\frac{z(t)}{v(t)}) \\ + p_2'(t, \frac{t}{\epsilon})(\frac{\partial f}{\partial \kappa}(\sigma(t, \frac{t}{\epsilon}), \frac{t}{\epsilon})z(t) + \frac{\partial f}{\partial u}(\sigma(t, \frac{t}{\epsilon}), \frac{t}{\epsilon})v(t))] dt$$

Ce problème admet un contrôle optimal  $v_1$ , unique. Si  $y_1$  est la trajectoire optimale associée, alors  $\|y_1\|_{C^0}$  et  $\|v_1\|_{C^0}$  restent bornés quand  $\epsilon$  varie. On notera  $q_1$  l'état adjoint;  $q_1$  est également borné quand  $\epsilon$  varie.

Preuve du lemme 1

Les hypothèses  $(H_3)$  et  $(H_4)$  assurent l'existence et l'unicité; les hypo-

sont bornés. Raisonnons en feedback. Soit  $V(x,t) = X'P(t)X + 2Q'(t)X + R(t)$  la fonction valeur; en utilisant le contrôle  $U=0$ , on vérifie que  $P$ ,  $Q$  et  $R$  sont bornés quand  $\epsilon$  varie

$$\begin{aligned} \text{or } \frac{dy_1}{dt} &= \frac{\partial f}{\partial x}(\sigma(t, \frac{t}{\epsilon}), \frac{t}{\epsilon})(y_1(t) + x_2(t, \frac{t}{\epsilon})) \\ &\quad - \frac{\partial f}{\partial u}(\sigma(t, \frac{t}{\epsilon}), \frac{t}{\epsilon}) \left[ \frac{\partial^2 H}{\partial u^2}(\rho_t(o, o)) \right]^{-1} \left[ 2 \frac{\partial f'}{\partial u}(\sigma(t, \frac{t}{\epsilon}), \frac{t}{\epsilon})(Py_1 + Q) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial^2 H}{\partial v \partial x}(\rho_t(o, o))y_1 + \frac{\partial f'}{\partial u}(\sigma(t, \frac{t}{\epsilon}), \frac{t}{\epsilon})P_2(t, \frac{t}{\epsilon}) \right] \end{aligned}$$

$$\text{et } y_1(o) = -x_2(o, o)$$

$$\begin{aligned} \text{Donc } y_1 \text{ est bornée; or } v_1 &= - \frac{\partial^2 H}{\partial u^2}(\rho_t(o, o)) \left[ 2 \frac{\partial f'}{\partial u}(\sigma(t, \frac{t}{\epsilon}), \frac{t}{\epsilon})(Py_1 + Q) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial^2 H}{\partial v \partial x}(\rho_t(o, o))y_1 + \frac{\partial f'}{\partial u}(\sigma(t, \frac{t}{\epsilon}), \frac{t}{\epsilon})P_2(t, \frac{t}{\epsilon}) \right], \text{ et est donc borné;} \end{aligned}$$

$$q_1 = 2(Py_1 + Q) \text{ est également borné.}$$

Remarque: En l'absence de précision, et pour la brièveté de l'énoncé,

$$x_2 \text{ signifiera : } x_2(t, \frac{t}{\epsilon}), u_o : u_o(t, \frac{t}{\epsilon}), x : x(t), \sigma = \sigma(t, \frac{t}{\epsilon}) \text{ etc..}$$

Lemme 2

$$\begin{aligned} \int_0^T L(x(t), u(t), t) dt &\approx \int_0^T L(y(t), u_o(t, \frac{t}{\epsilon}), t) dt \\ &+ \epsilon \int_0^T \frac{\partial H}{\partial x}(q(t), y(t), u_o(t, \frac{t}{\epsilon}), t, \frac{t}{\epsilon}) x_2(t, \frac{t}{\epsilon}) dt - \epsilon q(o) \cdot x_2(o, o) \\ &+ \int_0^T \left( \frac{\partial H}{\partial x}(q(t), y(t), u_o(t, \frac{t}{\epsilon}), t, \frac{t}{\epsilon}) \frac{\partial H}{\partial x}(q(t), y(t), u_o(t, \frac{t}{\epsilon}), t, \frac{t}{\epsilon}) \right) x(t) dt \\ &+ \int_0^T dt \int_0^1 \lambda d\lambda \int_0^1 d\mu (x'(t) + \epsilon x''_2(t, \frac{t}{\epsilon}), u'(t)) \frac{\partial^2}{\partial t^2}(\lambda, \mu) \left( \frac{x(t) + \epsilon x_2(t, \frac{t}{\epsilon})}{u(t)} \right) \end{aligned}$$

Preuve du lemme 2

$$\begin{aligned}
 \int_0^T L(x(t), u(t), t) dt &= \int_0^T \bar{L}(y + \varepsilon x_2 + \tilde{x}, u_0 + \tilde{u}, t) dt \\
 &= \int_0^T L(y, u_0, t) dt + \int_0^T \left( \frac{\partial L}{\partial x}(y, u_0, t)(\tilde{x} + \varepsilon x_2) - q' \frac{\partial f}{\partial u}(y, u_0, t, \frac{t}{\varepsilon}) \tilde{u} \right) dt \\
 &\quad + \int_0^T dt \int_0^1 \lambda d\lambda \int_0^1 d\mu (\tilde{x}' + \varepsilon x_2', \tilde{u}') \mathcal{L}_t(\lambda, \mu) \left( \frac{\tilde{x} + \varepsilon x_2}{\tilde{u}} \right) \\
 &= \int_0^T L(y(t), u_0(t, \frac{t}{\varepsilon}), t) dt \\
 &\quad + \int_0^T \frac{\partial H}{\partial x} (q, \sigma, \frac{t}{\varepsilon})(\tilde{x} + \varepsilon x_2) dt \\
 &\quad - \int_0^T q' \left( \frac{\partial f}{\partial x} (\sigma, \frac{t}{\varepsilon}) \tilde{x}(t) + \frac{\partial f}{\partial u} (\sigma, \frac{t}{\varepsilon}) \tilde{u}(\tau) \right) dt \\
 &\quad - \varepsilon \int_0^T q' \frac{\partial f}{\partial x} (\sigma, \frac{t}{\varepsilon}) x_2 dt \\
 &\quad + \int_0^T dt \int_0^1 \lambda d\lambda \int_0^1 d\mu (\tilde{x}' + \varepsilon x_2', \tilde{u}') \mathcal{L}_t(\lambda, \mu) \left( \frac{\tilde{x} + \varepsilon x_2}{\tilde{u}} \right) \\
 \text{Or } \frac{dx}{dt} &= f(y + \varepsilon x_2 + \tilde{x}, u_0 + \tilde{u}, t, \frac{t}{\varepsilon}) - \overline{f(y(t), u_0(t, \cdot), t, \cdot)} \\
 &\quad - \varepsilon \Pi \left( \frac{\partial}{\partial t} (f(\sigma(t, \cdot), \cdot)) \right) \left( \frac{t}{\varepsilon} \right) - f(y, u_0, t, \frac{t}{\varepsilon}) \\
 &\quad + \overline{f(y(t), u_0(t, \cdot), t, \cdot)} \\
 &= - \varepsilon \Pi \left( \frac{\partial}{\partial t} (f(y(t), u_0(t, \cdot), t, \cdot)) \right) \left( \frac{t}{\varepsilon} \right) + \frac{\partial f}{\partial x} (\sigma, \frac{t}{\varepsilon})(\tilde{x} + \varepsilon x_2) \\
 &\quad + \frac{\partial f}{\partial u} (\sigma, \frac{t}{\varepsilon}) \tilde{u} + \int_0^1 \lambda d\lambda \int_0^1 d\mu (\tilde{x}' + \varepsilon x_2', \tilde{u}') \mathcal{F}_t(\lambda, \mu) \left( \frac{\tilde{x} + \varepsilon x_2}{\tilde{u}} \right) \\
 \text{et } \varepsilon \int_0^T q' \Pi \left( \frac{\partial}{\partial t} (f(\sigma(t, \cdot), \cdot)) \right) \left( \frac{t}{\varepsilon} \right) dt &\text{ est d'ordre 2 d'après l'hypothèse (H5)}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{donc } \int_0^T L(x, u, t) dt &\approx \int_0^T L(y, u_0, t) dt \\ &+ \int_0^T \frac{\partial H}{\partial x} (q, \sigma, \frac{t}{\epsilon}) (\tilde{x} + \epsilon x_2) dt - \int_0^T q' \frac{d\tilde{x}}{dt} dt \\ &+ \int_0^T dt \int_0^1 \lambda d\lambda \int_0^1 d\mu (\tilde{x}' + \epsilon x_2', u') \frac{\partial}{\partial t} \ell_t(\lambda, \mu) (\frac{\tilde{x} + \epsilon x_2}{u}) \end{aligned}$$

$$\text{Or } \epsilon \int_0^T \frac{\partial H}{\partial x} (q(t), \sigma(t, \frac{t}{\epsilon}), \frac{t}{\epsilon}) x_2(t, \frac{t}{\epsilon}) dt \approx \epsilon \int_0^T \frac{\partial H}{\partial x} (q, \sigma(t, .), .) x_2(t, .) dt$$

$$\begin{aligned} \text{et } \frac{dq}{dt} &= - \frac{\partial \tilde{L}}{\partial x} (y(t), u_0(t, .), t, .) q - \frac{\partial \tilde{L}}{\partial x} (y(t), u_0(t, .), t) \\ &= - \frac{\partial H}{\partial x} (q, \sigma(t, .), .), \end{aligned}$$

d'où le résultat après intégration par parties.

**Lemme 3**

Soit  $x = \tilde{x} - \epsilon y_1$ ,  $v = \tilde{u} - \epsilon v_1$  et

$$Z_\epsilon(\lambda, \mu)(t) = v(t) + [(\frac{\partial^2 H}{\partial v^2})^{-1} \frac{\partial^2 H}{\partial v \partial x}]_{\rho(\lambda, \mu, t, \frac{t}{\epsilon})} (x(t) + \epsilon x_2(t, \frac{t}{\epsilon}))$$

$$\text{et soit } z_\epsilon^2 = \int_0^1 \lambda d\lambda \int_0^1 d\mu \|Z_\epsilon(\lambda, \mu)\|_{L^2}^2$$

Alors il existe  $k > 0$  tel que:

$$\begin{aligned} \|r\|_\infty^2 &< k(\epsilon^2 + z_\epsilon^2) \\ \text{et } \|v\|_{L^2}^2 &< k(\epsilon^2 + z_\epsilon^2) \end{aligned}$$

**Preuve du lemme 3**

$$\begin{aligned} \frac{dr}{dt} &= \frac{dx}{dt} - \epsilon \frac{dy_1}{dt} = \epsilon \frac{d}{dt} (x_2(t, \frac{t}{\epsilon})) = \epsilon \frac{dy_1}{dt} \\ &= f(r + \epsilon x_2 + \epsilon y_1, v + u_0 + \epsilon v_1, t, \frac{t}{\epsilon}) - f(y, u_0(t, \frac{t}{\epsilon}), t, \frac{t}{\epsilon}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\partial f}{\partial x} \left( \sigma, \frac{t}{\epsilon} \right) (y_1 + x_2) - \epsilon \frac{\partial f}{\partial u} \left( \sigma, \frac{t}{\epsilon} \right) v_1 \\
 &= \epsilon \Pi \left( \frac{\partial t}{\partial t} \left( f(\sigma(t, \cdot)) \right) \right) \left( \frac{t}{\epsilon} \right) \\
 &= f(r + y + \epsilon x_2 + \epsilon y_1, v + u_0 + \epsilon v_1, t, \frac{t}{\epsilon}) - f(y + \epsilon x_2 + \epsilon y_1, u_0 + \epsilon v_1, t, \frac{t}{\epsilon}) \\
 &+ \epsilon^2 \int_0^1 \lambda d\lambda \int_0^1 d\mu (x_2' + y_1', v_1') \mathcal{F}_t(\lambda, \mu) \begin{pmatrix} x_2 + y_1 \\ v_1 \end{pmatrix} \\
 &= \epsilon \Pi \left( \frac{\partial}{\partial t} \left( f(\sigma(t, \cdot)) \right) \right) \left( \frac{t}{\epsilon} \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Donc } |r(t)| &< \epsilon \left| \int_0^t \Pi \left( \frac{\partial}{\partial t} \left( f(\sigma(s, \cdot)) \right) \right) \left( \frac{s}{\epsilon} \right) ds \right| \\
 &+ \|\frac{\partial f}{\partial x}\|_{\infty} \int_0^t |r(s)| ds + \|\frac{\partial f}{\partial u}\|_{\infty} \int_0^t ds \left| Z_{\epsilon}(\lambda, \mu)(s) - \right. \\
 &\quad \left. - \left[ \left( \frac{\partial^2 H}{\partial v^2} \right)^{-1} \frac{\partial^2 H}{\partial v \partial x} \right] \left( r(s) + \epsilon x_2(s, \frac{s}{\epsilon}) \right) \right|_{\rho(\lambda, \mu, s, \frac{s}{\epsilon})} \Big| \\
 &+ \frac{\epsilon^2 t}{2} \|\mathcal{F}_t\|_{\infty} (\|x_2 + y_1\|_{\infty}^2 + \|v_1\|_{\infty}^2) \\
 &= \|\frac{\partial f}{\partial x}\|_{\infty} \int_0^t |r(s)| ds + \|\frac{\partial f}{\partial u}\|_{\infty} \int_0^t ds \left| Z_{\epsilon}(\lambda, \mu) - \right. \\
 &\quad \left. - \left[ \left( \frac{\partial^2 H}{\partial v^2} \right)^{-1} \frac{\partial^2 H}{\partial v \partial x} \right]_{\rho(\lambda, \mu, s, \frac{s}{\epsilon})} \left( r + \epsilon x_2(s, \frac{s}{\epsilon}) \right) \right|
 \end{aligned}$$

(cf. lemme 1 et hypothèse (H<sub>5</sub>))

Donc il existe  $\alpha > 0$ ,  $\beta > 0$ ,  $\gamma > 0$

$$\text{tels que } |r(t)| < \alpha \int_0^t |r(s)| ds + \beta \int_0^T |Z_{\epsilon}(\lambda, \mu)| dt + \gamma \epsilon$$

$$\text{donc } \|r\|_{\infty} < e^{\alpha T} (\beta \sqrt{T} \|Z_{\epsilon}(\lambda, \mu)\|_{L^2} + \gamma \epsilon)$$

et donc il existe  $k$  tel que  $\|x\|_{\infty}^2 < k (\epsilon^2 + 2 \|Z_{\epsilon}(\lambda; \mu)\|_{L^2}^2)$

ceci pour tout  $\lambda, \mu$  et donc  $\|x\|_{\infty}^2 < k(\epsilon^2 + x_{\epsilon}^2)$

D'autre part on a:

$$\|v\|_{L^2}^2 < \|Z_{\epsilon}(\lambda, \mu)\|_{L^2}^2 + \frac{1}{\beta} \sup_{\lambda, \mu, t} \left| \frac{\partial H^2}{\partial v \partial x}(\rho(\lambda, \mu, t, \frac{t}{\epsilon})) \right| (\|x\|_{\infty} + \epsilon \|x_2\|_{\infty})$$

qu'on peut majorer par un terme de la forme:

$$\alpha_1 \|Z_{\epsilon}(\lambda, \mu)\| + \beta_1 \epsilon$$

d'où la seconde estimation.

**Lemme 4**

Soit  $r_1$  défini par :

$$\frac{dr_1}{dt} = f(r_1 + y + \epsilon x_2 + \epsilon y_1, v + u_0 + \epsilon v_1, t, \frac{t}{\epsilon}) - f(y + \epsilon x_2 + \epsilon y_1, u_0 + \epsilon v_1, t, \frac{t}{\epsilon})$$

$$r_1(0) = 0$$

Alors il existe  $k > 0$  tel que  $\|r - r_1\|_{\infty} < k\epsilon^2$

Preuve du lemme 4 :

$$\begin{aligned} |(r - r_1)(t)| &< \|\frac{\partial f}{\partial x}\|_{\infty} \int_0^t |r(s) - r_1(s)| ds \\ &+ \frac{\epsilon^2}{2} \|\mathcal{F}_t\|_{\infty} (\|x_2 + y_1\|_{\infty}^2 + \|v_1\|_{\infty}^2) + \epsilon \left| \int_0^t \Pi(\frac{\partial}{\partial t} (f(\sigma(t, \cdot), \cdot))) (\frac{t}{\epsilon}) dt \right| \end{aligned}$$

Or le dernier terme est d'ordre 2 d'après l'hypothèse  $(H_5)$

Corollaire du lemme 4

On a donc  $\|r_1\|_{\infty}^2 < 2k(\epsilon^2 + z_{\epsilon}^2)$

**Lemme 5**

$$\begin{aligned} &\int_0^T [\frac{\partial H}{\partial x}(q, \sigma, \frac{t}{\epsilon}) - \frac{\partial H}{\partial x}(q, \sigma(t, \cdot), \cdot)] \tilde{x} dt \\ &= -\epsilon \int_0^T \Pi(\frac{\partial}{\partial t} (\frac{\partial H}{\partial x}(q, \sigma(t, \cdot), \cdot))) (\frac{t}{\epsilon}) r_1(t) dt \\ &+ \epsilon \int_0^T p'_2(t, \frac{t}{\epsilon}) \left( \frac{\partial f}{\partial x}(\sigma, \frac{t}{\epsilon}) r_1 + \frac{\partial f}{\partial u}(\sigma, \frac{t}{\epsilon}) v + (r'_1 + \epsilon x'_2 + \epsilon x'_1, v' + \epsilon v_1) \mathcal{F}_t(\lambda, \mu) \begin{pmatrix} r_1 \\ v_1 \end{pmatrix} \right) dt \end{aligned}$$

où l'on commence à voir apparaître le problème du lemme 1.

Preuve du lemme 5

Remarquons que  $- \epsilon \frac{d}{dt} (p_2'(t, \frac{t}{\epsilon})) = \epsilon \Pi (\frac{\partial}{\partial t} (\frac{\partial H}{\partial x}(q(t), \sigma(t, ., .)))(\frac{t}{\epsilon}))$

$+ \frac{\partial H}{\partial x}(q, \sigma, \frac{t}{\epsilon})(q, \sigma, \frac{t}{\epsilon}) - \overline{\frac{\partial H}{\partial x}(q, \sigma(t, ., .))}$ , par un calcul analogue à

celui qui fournit la dérivée de  $x_2(t, \frac{t}{\epsilon})$ . Il ne reste plus qu'à

intégrer par parties. On a donc:

$$\begin{aligned} & \int_0^T (\frac{\partial H}{\partial x}(q, \sigma, \frac{t}{\epsilon}) - \overline{\frac{\partial H}{\partial x}(q, \sigma(t, ., .))}) x_1 dt \\ & \approx \int_0^T (\frac{\partial H}{\partial x}(q, \sigma, \frac{t}{\epsilon}) - \overline{\frac{\partial H}{\partial x}(q, \sigma(t, ., .))}) [x_1 + \epsilon y_1] dt^{(*)} \\ & \approx - \epsilon \int_0^T \Pi (\frac{\partial}{\partial t} (\frac{\partial H}{\partial x}(q, \sigma(t, ., .)))(\frac{t}{\epsilon})) x_1(t) dt - \epsilon \int_0^T \frac{d}{dt} (p_2'(t, \frac{t}{\epsilon})) (x_1 + \epsilon y_1) dt \\ & = - \epsilon \int_0^T \Pi (\frac{\partial}{\partial t} (\frac{\partial H}{\partial x}(q, \sigma(t, ., .)))(\frac{t}{\epsilon})) x_1(t) dt - \epsilon^2 p_2(0, 0) x_2(0, 0) \\ & \quad + \epsilon \int_0^T p_2'(t, \frac{t}{\epsilon}) [f(x_1 + \epsilon x_2 + \epsilon y_1, v + \epsilon u_0 + \epsilon v_1, t, \frac{t}{\epsilon}) - f(y + \epsilon x_2 + \epsilon y_1, u_0 + \epsilon v_1, t, \frac{t}{\epsilon}) \\ & \quad + \epsilon \frac{\partial f}{\partial x}(\sigma(t, \frac{t}{\epsilon}), \frac{t}{\epsilon})(y_1 + x_2(t, \frac{t}{\epsilon})) + \epsilon \frac{\partial f}{\partial u}(\sigma, \frac{t}{\epsilon}) v_1] dt \\ & \approx - \epsilon \int_0^T \Pi (\frac{\partial}{\partial t} (\frac{\partial H}{\partial x}(q, \sigma(t, ., .)))(\frac{t}{\epsilon})) x_1(t) dt \\ & \quad + \epsilon \int_0^T p_2'(t, \frac{t}{\epsilon}) \left[ \frac{\partial f}{\partial x}(\sigma(t, \frac{t}{\epsilon}), \frac{t}{\epsilon}) x_1 + \frac{\partial f}{\partial u}(\sigma(t, \frac{t}{\epsilon}), \frac{t}{\epsilon}) v \right. \\ & \quad \left. + (x_1' + 2(\epsilon y_1' + \epsilon x_2'), v' + 2\epsilon v_1') \cdot t^{(\lambda, \mu)}(\frac{r_\lambda}{v}) \right] dt \end{aligned}$$

(\*)  $y_1$  dépend de  $\epsilon$  ; une étude direct du cas linéaire quadratique

montrerait que si  $y_1^0$  est la trajectoire du pb moyenné, alors

$$|y_1 - y_1^0| < \epsilon^2 ; \text{ et donc } \left| \int_0^T (\frac{\partial H}{\partial x} - \overline{\frac{\partial H}{\partial x}}) \epsilon y_1 dt \right| < \epsilon^2$$



Lemme 6

Il existe  $k > 0$  tel que :

$$- \epsilon \int_0^T \Pi \left( \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial H}{\partial x} (q, \sigma(t, \cdot, \cdot, \cdot)) \right) \left( \frac{t}{\epsilon} \right) x_1 \right) dt \geq - k \epsilon^2 (1 + z_\epsilon^2)$$

Preuve du lemme 6

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^T \Pi \left( \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial H}{\partial x} (q, \sigma(t, \cdot, \cdot, \cdot)) \right) \left( \frac{t}{\epsilon} \right) x_1 \right) dt \right| \\ &= \left| \int_0^T \Pi \left( \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial H}{\partial x} (q, \sigma(t, \cdot, \cdot, \cdot)) \right) \left( \frac{t}{\epsilon} \right) x_1(T) \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - \int_0^T \int_0^t \Pi \left( \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial H}{\partial x} (q, \sigma(s, \cdot, \cdot, \cdot)) \right) \left( \frac{s}{\epsilon} \right) \right) ds \right] \frac{dx_1}{dt} (t) dt \right| \end{aligned}$$

qu'on peut majorer (cf. hypothèse  $(H_5)$  et annexe) par :

$$k \epsilon ( \|x_1\|_\infty + \left\| \frac{dx_1}{dt} \right\|_{L^1(0, T, \mathbb{R}^n)} )$$

$$\begin{aligned} \text{Or } \left| \frac{dx_1}{dt} \right| &< k' ( |x_1| + |v| ) \\ &< k' ( 2 + |x_1|^2 + |v|^2 ) \end{aligned}$$

$$\text{donc } \left\| \frac{dx_1}{dt} \right\|_{L^1} < k'' (1 + z_\epsilon^2)$$

$$\begin{aligned} \text{et finalement } & \epsilon \int_0^1 \Pi \left( \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial H}{\partial x} (q, \sigma(t, \cdot, \cdot, \cdot)) \right) \left( \frac{t}{\epsilon} \right) x_1 \right) dt \\ & \geq - k''' \epsilon^2 (1 + z_\epsilon^2) \end{aligned}$$

Lemme 7

Il existe  $k > 0$  tel que :

$$\epsilon \int_0^t (x_1' + 2\epsilon(y_1 + x_2)', v' + 2\epsilon v_1') \mathcal{F}_t(\lambda, \mu) \left( \frac{r_1}{v} \right) dt \geq -k\epsilon^2(1 + z_\epsilon^2)$$

Preuve du lemme 7

$$\left| \int_0^t ((y_1 + x_2)', v_1') \mathcal{F}_t(\lambda, \mu) \left( \frac{r_1}{v} \right) dt \right|$$

$$\leq k(\|x_1\|_{L^2}^2 + \|v\|_{L^2}^2) \leq k(2 + \|x_1\|_{L^2}^2 + \|v\|_{L^2}^2)$$

$$\leq k'(2 + \epsilon^2 + z_\epsilon^2)$$

$$\text{D'autre part } \left| \int_0^T (x_1', v') \mathcal{F}_t(\lambda, \mu) \left( \frac{r_1}{v} \right) dt \right| \leq k(\|x_1\|_{L^2}^2 + \|v\|_{L^2}^2)$$

$$\leq k''(\epsilon^2 + z_\epsilon^2)$$

$$\text{donc } \epsilon \int_0^T (x_1' + 2\epsilon(y_1 + x_2)', v' + 2\epsilon v_1') \mathcal{F}_t(\lambda, \mu) \left( \frac{r_1}{v} \right) dt$$

$$\geq -k'\epsilon^2(2 + \epsilon^2 + z_\epsilon^2) - k''\epsilon(\epsilon^2 + z_\epsilon^2)$$

$$\geq -k'''\epsilon^2(1 + z_\epsilon^2)$$

Récapitulons :

$$\text{On a donc } \int_0^T \left( \frac{\partial H}{\partial x} (q, \sigma, \frac{t}{\epsilon}) - \overline{\frac{\partial H}{\partial x} (q, \sigma(t, \cdot, \cdot))} \left( \frac{t}{\epsilon} \right) \right) dx \sim dt$$

$$\geq \epsilon \int_0^T p_2'(t, \frac{t}{\epsilon}) \left[ \frac{\partial f}{\partial x} (\sigma, \frac{t}{\epsilon}) x_1 + \frac{\partial f}{\partial v} (\sigma, \frac{t}{\epsilon}) v \right] dt \geq -k\epsilon^2 - k\epsilon^2 z_\epsilon^2$$

Nous allons passer à l'étude des termes de la dernière ligne de l'énoncé du théorème 2, après avoir étudié la ligne précédente.

Lemme 8

Il existe  $k > 0$  tel que :

$$\int_0^T dt \int_0^1 \lambda d\lambda \int_0^1 d\mu (\tilde{x}' + \epsilon x'_2, \tilde{u}') \eta_{\epsilon}^0(\lambda, \mu) \begin{pmatrix} \tilde{x} + \epsilon x_2 \\ \tilde{u} \end{pmatrix} > \\ - k \epsilon^2 + \beta z_{\epsilon}^2 + 2\epsilon \int_0^T dt \int_0^1 \lambda d\lambda \int_0^1 d\mu (y'_1, v'_1) \eta_{\epsilon}^0(\lambda, \mu) \begin{pmatrix} r + \epsilon x_2 \\ v \end{pmatrix}$$

Preuve du Lemme 8

$$\begin{aligned} & \int_0^T dt \int_0^1 \lambda d\lambda \int_0^1 d\mu (\tilde{x}' + \epsilon x'_2, \tilde{u}') \eta_{\epsilon}^0(\lambda, \mu) \begin{pmatrix} \tilde{x} + \epsilon x_2 \\ \tilde{u} \end{pmatrix} \\ &= \int_0^T dt \int_0^1 \lambda d\lambda \int_0^1 d\mu (r' + \epsilon x'_2, v') \eta_{\epsilon}^0(\lambda, \mu) \begin{pmatrix} r + \epsilon x_2 \\ v \end{pmatrix} \\ &+ 2\epsilon \int_0^T dt \int_0^1 \lambda d\lambda \int_0^1 d\mu (y'_1, v'_1) \eta_{\epsilon}^0(\lambda, \mu) \begin{pmatrix} r + \epsilon x_2 \\ v \end{pmatrix} \\ \text{or } & (r' + \epsilon x'_2, v') \eta_{\epsilon}^0(\lambda, \mu) \begin{pmatrix} r + \epsilon x_2 \\ v \end{pmatrix} = \\ & ((r + \epsilon x_2)', Z'_{\epsilon}(\lambda, \mu)(t) - (r' + \epsilon x'_2) \left[ \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial v} \left( \frac{\partial^2 H}{\partial v^2} \right)^{-1} \right] \rho(\lambda, \mu, t, \frac{t}{\epsilon})) \\ & \times \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial v} \\ \frac{\partial^2 H}{\partial v \partial x} & \frac{\partial^2 H}{\partial v^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r + \epsilon x_2 \\ Z_{\epsilon}(\lambda, \mu)(t) - \left[ \left( \frac{\partial^2 H}{\partial v^2} \right)^{-1} \frac{\partial^2 H}{\partial v \partial x} \right] \rho(\lambda, \mu, t, \frac{t}{\epsilon}) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Nous omettons de mentionner  $\rho$  dans la suite du calcul.

$$\begin{aligned} &= (r + \epsilon x_2)', \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} (r + \epsilon x_2) + 2(r + \epsilon x_2)', \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial v} Z_{\epsilon}(\lambda, \mu)(t) \\ &- 2(r + \epsilon x_2)', \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial v} \left( \frac{\partial^2 H}{\partial v^2} \right)^{-1} \frac{\partial^2 H}{\partial v \partial x} (r + \epsilon x_2) + Z'_{\epsilon}(\lambda, \mu)(t) \frac{\partial^2 H}{\partial v^2} Z_{\epsilon}(\lambda, \mu)(t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - 2(x' + \epsilon x_2') \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial v} Z_\epsilon(\lambda, \mu)(t) + (x' + \epsilon x_2') \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial v} \left( \frac{\partial^2 H}{\partial v^2} \right)^{-1} \frac{\partial^2 H}{\partial v \partial x} (x + \epsilon x_2) \\
 & \leq \beta \left| Z_\epsilon(\lambda, \mu)(t) \right|^2 + (x + \epsilon x_2)' \left( \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial v} \left( \frac{\partial^2 H}{\partial v^2} \right)^{-1} \frac{\partial^2 H}{\partial v \partial x} \right) (x + \epsilon x_2) \\
 & \leq \beta \left| Z_\epsilon(\lambda, \mu)(t) \right|^2
 \end{aligned}$$

Il ne reste plus qu'à intégrer en  $t$ , puis  $\lambda$  et  $\mu$  pour obtenir le résultat.

Lemme 9

Il existe  $k > 0$  tel que

$$\begin{aligned}
 & 2\epsilon \int_0^T dt \int_0^1 \lambda d\lambda \int_0^1 d\mu(y_1', v_1') \eta_t^\lambda(\lambda, \mu) \left( \frac{x + \epsilon x_2}{v} \right) \\
 & \leq 2\epsilon \int_0^T dt \int_0^1 \lambda d\lambda \int_0^1 d\mu(y_1', v_1') \eta_t^\lambda(0, 0) \left( \frac{x + \epsilon x_2}{v} \right) - k\epsilon^2 - k\epsilon z_\epsilon^2
 \end{aligned}$$

Preuve du lemme 9

Rappelons que les dérivées secondes de  $H$  en  $x$  et  $v$  sont lipschitz en  $x$  et  $v$ .

Donc si  $\Lambda$  est la constante de Lipschitz on a :

$$\begin{aligned}
 & \left| (y_1', v_1') [\eta_t^\lambda(\lambda, \mu) - \eta_t^\lambda(0, 0)] \left( \frac{x + \epsilon x_2}{v} \right) \right| \\
 & \leq \Lambda \lambda \mu \left( |y_1'|^2 + |v_1'|^2 \right)^{1/2} \left( |x + \epsilon x_2 + \epsilon y_1|^2 + |v + \epsilon v_1|^2 \right)^{1/2} \\
 & \leq \Lambda \left( |x + \epsilon x_2|^2 + |v|^2 \right)^{1/2}
 \end{aligned}$$

$y_1'$ ,  $x_2$  et  $v_1$  étant bornés pour tout  $t$ ,  $\epsilon$ , on peut majorer ce terme par un autre de la forme :

$$k(\epsilon^2 + |x|^2 + |v|^2)$$

$$\text{Donc } 2\epsilon \int_0^T dt \int_0^1 \lambda d\lambda \int_0^1 d\mu(y_1', v_1') [\eta_t^\lambda(\lambda, \mu) - \eta_t^\lambda(0, 0)] \left( \frac{x + \epsilon x_2}{v} \right)$$

$$\leq k' \epsilon (\epsilon^2 + \|x\|_\infty^2 + \|v\|_{L^2}^2) < k \epsilon^2 + k \epsilon z_\epsilon^2$$

Récapitulons: Il existe  $k > 0$  tel que:

$$\begin{aligned} & \int_0^T L(x(t), u(t), t) dt > \int_0^T L(y(t), u_0(t, \frac{t}{\epsilon}), t) dt \\ & + \epsilon \int_0^T \frac{\partial H}{\partial x} (q(t), \sigma(t, \cdot), \cdot) x_2(t, \cdot) dt - \epsilon q(0) \cdot x_2(0, 0) \\ & + \epsilon \int_0^T p_2'(t, \frac{t}{\epsilon}) \left[ \frac{\partial f}{\partial x} (\sigma, \frac{t}{\epsilon}) x_1 + \frac{\partial f}{\partial v} (\sigma, \frac{t}{\epsilon}) v \right] dt + \\ & + 2\epsilon \int_0^T dt \int_0^1 \lambda d\lambda \int_0^1 d\mu (y_1', v_1') t(0, 0) \left( \frac{x + \epsilon x_2}{v} \right) \\ & + z_\epsilon^2 (\beta - k\epsilon) - k\epsilon^2 \end{aligned}$$

Nous pouvons achever la démonstration du théorème à l'aide du:

Lemme 10 : Il existe  $k > 0$  tel que:

$$\begin{aligned} & \epsilon \int_0^T p_2'(t, \frac{t}{\epsilon}) \left[ \frac{\partial f}{\partial x} (\sigma, \frac{t}{\epsilon}) x_1 + \frac{\partial f}{\partial v} (\sigma, \frac{t}{\epsilon}) v \right] dt + \\ & 2\epsilon \int_0^T dt \int_0^1 \lambda d\lambda \int_0^1 d\mu (y_1', v_1') t(0, 0) \left( \frac{x + \epsilon x_2}{v} \right) \\ & > -k\epsilon (\epsilon^2 + z_\epsilon^2) \end{aligned}$$

Preuve du Lemme 10

Rappelons-nous du problème tangent énoncé dans le lemme 1. On a:

$$-\frac{dq_1'}{dt} = q_1' \frac{\partial f}{\partial x} (\sigma, \frac{t}{\epsilon}) + p_2' (t, \frac{t}{\epsilon}) \frac{\partial f}{\partial x} (\sigma, \frac{t}{\epsilon}) + [y_1' \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} (q, \sigma, \frac{t}{\epsilon}) + v_1' \frac{\partial^2 H}{\partial v \partial x} (q, \sigma, \frac{t}{\epsilon})]$$

D'autre part nous avons:

$$v_1' \frac{\partial^2 H}{\partial v^2} (q, \sigma, \frac{t}{\epsilon}) + y_1' \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial v} (q, \sigma, \frac{t}{\epsilon}) + (q_1' + p_2') \frac{\partial f}{\partial v} (\sigma, \frac{t}{\epsilon}) = 0$$

En approximant  $r$  par  $r_1$  et en négligeant  $\epsilon^2 x_2$ , on a donc:

$$\begin{aligned} & \epsilon \int_0^T p'_2(t, \frac{t}{\epsilon}) \left[ \frac{\partial f}{\partial x}(\sigma, \frac{t}{\epsilon}) r_1 + \frac{\partial f}{\partial v}(\sigma, \frac{t}{\epsilon}) v \right] dt \\ & \quad + 2\epsilon \int_0^T dt \int_0^1 \lambda d\lambda \int_0^1 d\mu (y'_1, v'_1) \mathcal{F}_t^0(o, o) \left( \frac{r_1 + \epsilon x_2}{v} \right) \\ & \quad (\text{notons que } \mathcal{H}_t(o, o) \text{ ne dépend pas de } (\lambda, \mu) \text{ et que } \int_0^1 \lambda d\lambda \int_0^1 d\mu = \frac{1}{2}) \\ & \approx \epsilon \int_0^T \left\{ \left[ p_2(t, \frac{t}{\epsilon}) \frac{\partial f}{\partial x}(\sigma, \frac{t}{\epsilon}) + y'_1 \frac{\partial^2 H}{\partial x^2}(q, \sigma, \frac{t}{\epsilon}) + v'_1 \frac{\partial^2 H}{\partial v \partial x}(q, \sigma, \frac{t}{\epsilon}) \right] r_1 \right. \\ & \quad \left. + \left[ p'_2(t, \frac{t}{\epsilon}) \frac{\partial f}{\partial v}(\sigma, \frac{t}{\epsilon}) + y'_1 \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial v}(q, \sigma, \frac{t}{\epsilon}) + v'_1 \frac{\partial^2 H}{\partial v^2}(q, \sigma, \frac{t}{\epsilon}) \right] v \right\} dt \\ & = - \epsilon \int_0^T \left\{ \left[ \frac{dq'_1}{dt} + q'_1 \frac{\partial f}{\partial x}(\sigma, \frac{t}{\epsilon}) \right] r_1 + q'_1 \frac{\partial f}{\partial v}(\sigma, \frac{t}{\epsilon}) v \right\} dt \\ & \stackrel{=}{=} \epsilon \int_0^T q'_1 \{ f(r_1 + y + \epsilon x_2 + \epsilon y_1, v + u_o + \epsilon v_1, t, \frac{t}{\epsilon}) - \\ & \quad - f(y + \epsilon x_2 + \epsilon y_1, u_o + \epsilon v_1, t, \frac{t}{\epsilon}) \\ & \quad - \frac{\partial f}{\partial x}(\sigma, \frac{t}{\epsilon}) r_1 - \frac{\partial f}{\partial v}(\sigma, \frac{t}{\epsilon}) v \} dt \\ & = \epsilon \int_0^T dt q'_1 \int_0^1 \lambda d\lambda \int_0^1 d\mu (r'_1, v') \mathcal{F}_t(\lambda, \mu) \left( \frac{r_1 + 2\epsilon x_2 + 2\epsilon y_1}{v + 2\epsilon v_1} \right), \end{aligned}$$

dont on peut majorer la valeur absolue par un terme de la forme

$$K\epsilon(\epsilon^2 + z_\epsilon^2).$$

Récapitulons:

$\epsilon$  étant plus petit que 1, il existe donc  $k > 0$  tel qu'on ait:

$$\begin{aligned} \int_0^T L(x(t), u(t), t) dt &\geq \int_0^T L(y(t), u_0(t, \frac{t}{\epsilon}), t) dt \\ &+ \epsilon \int_0^T \overline{\frac{\partial H}{\partial x}}(q(t), \sigma(t, \cdot) x_2(t, \cdot)) dt - \epsilon q(0) \cdot x_2(0, 0) \\ &+ \frac{\epsilon^2}{2} (\beta - k\epsilon) - k\epsilon^2 \end{aligned}$$

Le théorème est donc prouvé par  $\epsilon_0 = \frac{\beta}{k}$

3.2.4 - Corollaire (3.1) Minoration du coût optimal de  $(P_2)$  à l'ordre 2

Soit  $J_\epsilon^* = \inf_{u \in L^2(0, T, \mathbb{R}^p)} J_\epsilon(u)$ .

Alors, pour  $\epsilon < \epsilon_0$  on a :

$$\begin{aligned} J_\epsilon^* &\geq \int_0^T L(y(t), u_0(t, \frac{t}{\epsilon}), t) dt + \epsilon \int_0^T \overline{\frac{\partial H}{\partial x}}(q(t), \sigma(t, \cdot) x_2(t, \cdot)) dt \\ &- \epsilon q(0) \cdot x_2(0, 0) - k\epsilon^2 \end{aligned}$$

### 3.3 - Théorème (3.2): Développement du coût pour $u_0$ , commande optimale du problème moyenné

Soit  $f$ ,  $L$  et  $u_0$  vérifiant les hypothèses  $(H_1)$ ,  $(H_2)$ ,  $(H_5)$  du théorème (2.1). Soit  $U_0$  le contrôle défini par  $U_0(t) = u_0(t, t/\epsilon)$

Alors

$$J_\epsilon(u_0) \approx \int_0^T L(y(t), u_0(t, \frac{t}{\epsilon}), t) dt - \epsilon q'(0) x_2(0, 0) \\ + \epsilon \int_0^T \frac{\partial H}{\partial x} (q(t), \sigma(t, \cdot, \cdot, \cdot) x_2(t, \cdot)) dt$$

où  $\approx$  signifie: à  $k\epsilon^2$  près

#### Démonstration

Reprenons les notations du théorème (2.1) et posons  $x$  comme étant la trajectoire commandée par  $U_0$ , c'est à dire:

$$\frac{dx}{dt} = f(x(t), u_0(t, \frac{t}{\epsilon}), t, \frac{t}{\epsilon}), \quad x(0) = x_0$$

On a, bien sûr,  $\tilde{u} = 0$

$$\text{Donc } \int_0^T L(x(t), u_0(t, \frac{t}{\epsilon}), t, \frac{t}{\epsilon}) dt \approx \int_0^T L(y(t), u_0(t, \frac{t}{\epsilon}), t) dt$$

$$+ \epsilon \int_0^T \frac{\partial H}{\partial x} (q(t), \sigma(t, \cdot, \cdot, \cdot) x_2(t, \cdot)) dt - \epsilon q'(0) x_2(0, 0)$$

$$+ \int_0^T \left[ \frac{\partial H}{\partial x} (q, \sigma, \frac{t}{\epsilon}) - \frac{\partial H}{\partial x} (q(t), \sigma(t, \cdot, \cdot, \cdot)) \tilde{x} \right] dt$$

$$+ \int_0^T dt \int_0^1 \lambda d\lambda \int_0^1 d\mu (x' + \epsilon x'_2) \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} (q, \sigma, \frac{t}{\epsilon}) (\tilde{x} + \epsilon x_2)$$

Il s'agit donc de montrer que la somme des deux dernières lignes est d'ordre 2. D'après l'hypothèse  $(H_5)$  et la partie (A.2) de l'annexe, nous avons  $|x-y| < \epsilon$  et donc  $|\tilde{x}| < \epsilon$ . Ceci nous assure que le dernier terme (en  $\partial^2 H / \partial x^2$ ) est d'ordre 2.



D'autre part, en raisonnant comme dans le lemme 5 du théorème (2.1) on a :

$$\begin{aligned} & \int_0^T \left[ \frac{\partial H}{\partial x} (q, \sigma, \frac{t}{\epsilon}) - \overline{\frac{\partial H}{\partial x} (q(t), \sigma(t, ., .))} \right] \tilde{x} dt \\ &= - \epsilon \int_0^T \Pi \left( \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial H}{\partial x} (q, \sigma(t, ., .)) \right) \right) \left( \frac{t}{\epsilon} \right) \tilde{x} dt + \epsilon \int_0^T p'_2 \left( t, \frac{t}{\epsilon} \right) \frac{d\tilde{x}}{dt} dt \\ &= \epsilon \int_0^T p'_2 \left( t, \frac{t}{\epsilon} \right) \frac{d\tilde{x}}{dt} dt \quad \text{car } \tilde{x} \text{ est d'ordre 1.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Or } \frac{d\tilde{x}}{dt} &= - \epsilon \Pi \left( \frac{\partial}{\partial t} (f(\sigma(.), .)) \right) \left( \frac{t}{\epsilon} \right) + \frac{\partial f}{\partial x} \left( \sigma, \frac{t}{\epsilon} \right) (\tilde{x} + \epsilon x_2) \\ &+ \int_0^1 \lambda d\lambda \int_0^1 d\mu (\tilde{x}' + \epsilon x_2') \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \left( \rho(\lambda, \mu, t, \frac{t}{\epsilon}) \right) (\tilde{x} + \epsilon x_2) \end{aligned}$$

Du fait que  $x$  est d'ordre 1 on déduit que  $dx/dt$  est d'ordre 1, ce qui clôt la démonstration.

### 3.4 - Corollaire (3.2): doublement de l'ordre d'approximation

Soit  $f, L$  et  $u_0$  vérifiant les hypothèses du théorème (2.1),  $y$  la trajectoire optimale du problème moyenné associée à  $u_0$ .

Alors il existe  $k > 0$ ,  $\epsilon_0 > 0$  tels que, pour  $\epsilon \leq \epsilon_0$ , on ait:

$$J_\epsilon^* < J_\epsilon(u_0) < J_\epsilon^* + k\epsilon^2$$

De plus, si  $u$  est "meilleur" que  $u_0$  (c'est à dire  $J_\epsilon(u) < J_\epsilon(u_0)$ ), si  $x$  est la trajectoire commandée par  $u$  pour le problème  $P_\epsilon$ , on a alors:

$$\begin{aligned} \|x - y\|_\infty &< k(1 + \frac{1}{\sqrt{\beta}}) \epsilon \\ \|u - u_0\|_{L^2(0,T,R^p)} &\leq k(1 + \frac{1}{\sqrt{\beta}}) \epsilon \end{aligned}$$

**Preuve du corollaire:**

Soit  $\epsilon_1 = \frac{\epsilon_0}{2} = \frac{\beta}{2k}$  du théorème (2.1): Pour  $\epsilon \leq \epsilon_1$ , on a:

$J_\epsilon^* \geq J_\epsilon(u_0) - k_1 \epsilon^2 - k_2 \epsilon^2$  d'après le corollaire (3.1) et le théorème (3.2)

Si  $u$  est meilleur que  $u_0$ , alors, pour  $\epsilon \leq \epsilon_1$

$$\begin{aligned} J_\epsilon(u_0) &\geq J_\epsilon(u) \geq z_\epsilon^2(\beta - k\epsilon) - k\epsilon^2 + J_\epsilon(u_0) \\ &\geq z_\epsilon^2 \frac{\beta}{2} - k\epsilon^2 + J_\epsilon(u_0) \end{aligned}$$

$$\text{donc } z_\epsilon^2 + \epsilon^2 < k_1(1 + \frac{1}{\beta})$$

$$\text{donc } \|x - y - \epsilon y_1 - \epsilon x_2\|_\infty^2 < k_1(1 + \frac{1}{\beta})$$

$$\text{et } \|u_0 - u - \epsilon v_1\|_{L^2}^2 < k_1(1 + \frac{1}{\beta})$$

d'où les estimations annoncées.

### 3.5 - Comparaison des développements obtenus avec le développement à-priori de la fonction valeur.

Sous les hypothèses de théorème (2.1) nous avons donc:

$$\begin{aligned} & \int_0^T L(x(t), u_0(t, \frac{t}{\epsilon}), t) dt \approx \\ & \int_0^T L(y(t), u_0(t, \frac{t}{\epsilon}), t) dt - \epsilon q(0) \cdot x_2(0, 0) \\ & + \int_0^T \frac{\partial H}{\partial x}(y(t), q(t), u_0(t, \cdot), t, \cdot) x_2(t, \cdot) dt \end{aligned}$$

Il serait intéressant de comparer ce développement à celui obtenu en développant la fonction valeur  $V^\epsilon(x, t, \theta)$  en  $V_0(x, t) + \epsilon V_1(x, t, \theta)$  comme dans le paragraphe (1.2).

Commençons par identifier  $V_0$  et  $V_1$  par un calcul formel, analogue à celui effectué dans le paragraphe 1.2, et dans le cas linéaire quadratique. Nous avons:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \min_u \left[ \frac{\partial V}{\partial x}(x, t) f(x, u, t, \cdot) + L(x, u, t) \right] = 0, \quad V_0(x, T) = 0$$

En supposant l'argument de minimisation unique et en le notant  $v(x, t, \theta)$  nous avons:

$$V_1(x, t, \theta) = S_1(x, t, \theta) + Q_1(x, t) \text{ avec :}$$

$$\begin{aligned} S_1(x, t, \theta) &= - \Pi \left( \frac{\partial V}{\partial x}(x, t) f(x, v(x, t, \cdot), t, \cdot) + L(x, v(x, t, \cdot), t) \right) (\theta) \\ &= - \Pi \left( \min_u \left[ \frac{\partial V}{\partial x}(x, t) f(x, u, t, \cdot) + L(x, u, t) \right] \right) (\theta), \end{aligned}$$

Ce qui a toujours un sens si on suppose, par exemple, une continuité uniforme de  $f$  en  $\theta$ ;

Remarquons que  $S_1(x, T, \Theta) = - \Pi(\min(L(x, u, t)) = 0$  où l'on

voit intervenir l'hypothèse  $\frac{\partial L}{\partial x} = \Theta$ ,

Supposons maintenant  $V$  de classe  $C^2$  en  $x$ , pour simplifier.

$$\text{Alors } \Pi(f)' \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} f = \frac{1}{\omega} \int_0^\omega \sum_{i,j} \Pi(f_i) \frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j} f_j d\Theta$$

ce qui vaut, après intégration par parties,

$$- \frac{1}{\omega} \int_0^\omega \sum_{i,j} \Pi(f_i) \frac{\partial^2 V}{\partial x_j \partial x_i} f_j d\Theta, \text{ qui est donc nul; et donc}$$

$$\frac{\partial S}{\partial x} \frac{1}{2} f = - \Pi(f)' \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} f + \frac{\partial V}{\partial x} \Pi\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) f + \Pi\left(\frac{\partial L}{\partial x}\right) f$$

$$= - \left[ \frac{\partial V}{\partial x} \Pi\left(\frac{\partial}{\partial x} f(x, v(x, t, \cdot), t, \cdot)\right) + \frac{\partial}{\partial x} (L(x, v(x, t, \cdot), t)) \right] f(x, v(x, t, \cdot), t, \cdot)$$

$$= - \left[ \frac{\partial V}{\partial x} \Pi\left(\frac{\partial f}{\partial x} (x, v(x, t, \cdot), t, \cdot)\right) + \Pi\left(\frac{\partial L}{\partial x} (x, v(x, t, \cdot), t)\right) \right] f(x, v(x, t, \cdot), t, \cdot)$$

$$= - \Pi \left( \frac{\partial \Pi}{\partial x} \left( \frac{\partial V}{\partial x} (x, t), x, t, \cdot \right) \right) f(x, v(x, t, \cdot), t, \cdot)$$

soit, après intégrations par parties,

$$\frac{\partial \Pi}{\partial x} \left( \frac{\partial V}{\partial x} (x, t), x, t, \cdot \right) \Pi(f(x, v(x, t, \cdot), t, \cdot),$$

où  $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$  n'intervient plus; en particulier ce résultat doit se

généraliser au cas où  $\frac{\partial V}{\partial x}$  n'admet des dérivées qu'en un sens plus faible:

Or on vérifie :

$$\begin{cases} \frac{\partial Q_1}{\partial t} + \frac{\partial Q_1}{\partial x} \overline{f(x, v(x, t, .), t, .)} + \frac{\partial S_1}{\partial x} (x, t, .) \overline{f(x, v(x, t, .), t, .)} = 0 \\ Q_1(T) = 0 \end{cases}$$

et  $Q_1$  peut s'interpréter (sous réserves d'existences de ces

trajectoires) comme l'intégrale

$$\int_t^T \frac{\partial S_1}{\partial x} (x(s), s, .) \overline{f(x(s), v(x(s), s, .), s, .)} ds$$

le long des trajectoires (optimales)

$$\begin{cases} \frac{dz}{ds} = \overline{f(z, v(z, s, .), s, .)} \\ z(t) = x \end{cases}$$

Cette trajectoire existe en particulier pour  $x=x_0$  et  $t=0$  : c'est  $y$ , et on a  $v(y(s), s, \theta) = u_0(s, \theta)$  ; et donc, d'après ce qui précède,

$$Q_1(x_0, 0) = \int_0^T \frac{\partial H}{\partial x} (y(t), q(t), u_0(t, .), t, .) x_2(t, .) dt$$

par définition de  $x_2$ .

D'autre part,

$$\begin{aligned} S_1(x_0, 0, 0) &= -H(q_0(0), \overline{f(x_0, u_0(0, .), 0, .)})(0) \\ &\quad - H(L(x_0, u_0(0, .), 0))(0) \\ &= -q(0)x_2(0, 0) - H(L(x_0, u_0(0, .), 0))(0) \end{aligned}$$

Le développement à priori de la fonction valeur nous donne donc un

coût optimal pour  $p^e$  qui, à  $k\epsilon^2$  près, vaut :

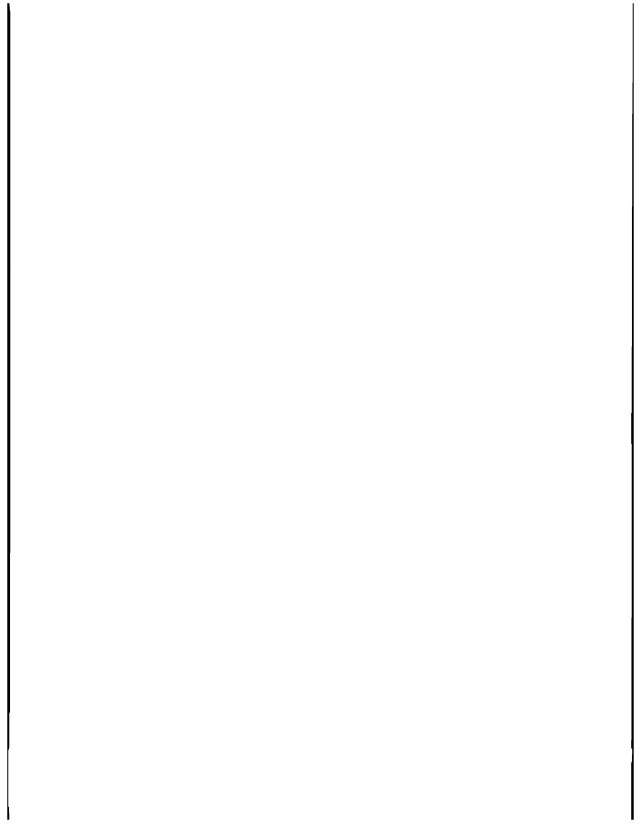
$v_0(x_0, 0) + \epsilon S_1(x_0, 0, 0) + \epsilon Q_1(x_0, 0)$  c'est-à-dire

$$\begin{aligned} \int_0^T \overline{L(y(t), u_0(t, \cdot), t)} dt &= q(0) \cdot x_2(0, 0) \\ &+ \int_0^T \overline{\frac{\partial H}{\partial x} (y(t), q(t), u_0(t, \cdot), t, \cdot) x_2(t, \cdot)} \\ &= \Pi(L(x_0, u_0(0, \cdot), 0))(0) \end{aligned}$$

Or un théorème d'approximation nous apprend que :

$$\begin{aligned} \int_0^T L(y(t), u_0(t, \frac{T}{\epsilon}), t) dt &\approx \int_0^T \overline{L(y(t), u_0(t, \cdot), t)} dt \\ &+ \Pi(L(y(T), u_0(T, \cdot), T)(\frac{T}{\epsilon})) = \Pi(L(x_0, u_0(0, \cdot), 0)(0) \\ &- \int_0^T L(y(t), u_0(t, \cdot), t) dt = \Pi(L(x_0, u_0(0, \cdot), 0)(0) \\ &= S_1(y(T), T, \frac{T}{\epsilon}) ; \end{aligned}$$

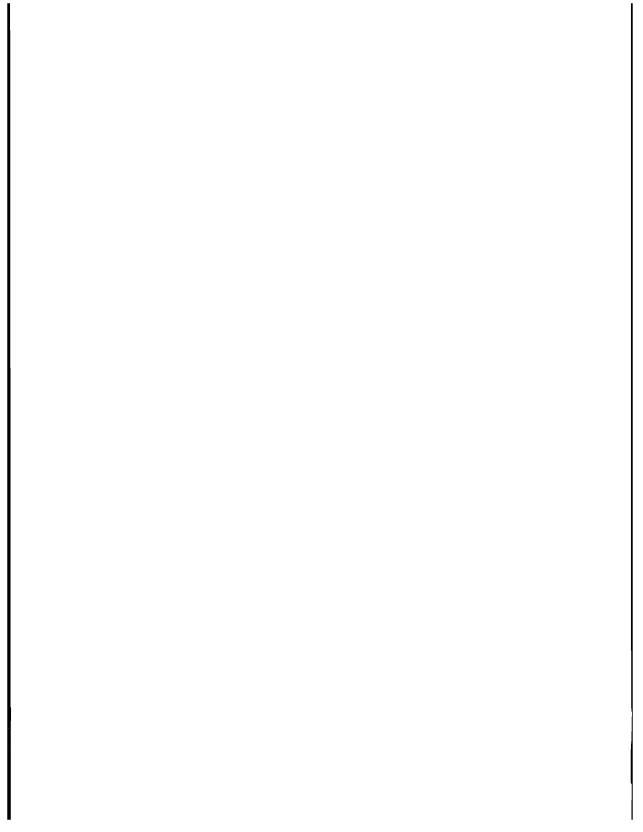
or nous savons que  $S_1(x, T, 0) = 0$  ; les deux développements coïncident donc.



## CHAPITRE IV

### THEOREME LIMITE SUR LES FONCTIONS VALEUR





#### IV - THÉOREME LIMITE SUR LES FONCTIONS VALEUR

##### 4.1 - Introduction

Rappelons-nous comment, dans le chapitre I, nous avons introduit le problème moyenné associé à des problèmes oscillatoires rapides. Nous avons commencé par étudier les trajectoires du problème d'origine et remarqué qu'on pouvait les approximer, pour  $\epsilon$  petit, par des trajectoires "moyennées", ceci par une méthode d'averaging classique en équations différentielles. Or cette même méthode (cf. annexe) peut se généraliser à des dynamiques non périodiques en  $\Theta$ , mais satisfaisant à une hypothèse de moyenne sur cette dernière variable.

La question se pose donc de généraliser l'approche précédente à des problèmes de contrôle optimal "à temps rapide" mais non périodique, en ce sens que la dynamique  $f$  n'est plus nécessairement périodique en  $\Theta$ .

La question du doublement d'ordre d'approximation nous est apparue délicate à traiter, en raison de la vitesse de convergence de la moyenne, qui ne restitue pas forcément un ordre entier. Néanmoins, ce qui a été fait devrait pouvoir se généraliser au cas où  $f$  admet une primitive en  $\Theta$  qui soit bornée. À supposer que le problème moyenné (cf chap-V) soit facilement manipulable.

Par contre, il nous est apparu qu'un théorème de convergence sur les fonctions valeur, analogue à celui présenté dans [5], devait pouvoir se généraliser au cas non périodique, en s'appuyant uniquement sur des hypothèses de moyenne, et que, si hypothèse de moyenne il y devait y avoir, il suffirait de la faire sur le minimum de l'hamiltonien  $H(p,x,t,\Theta)$ , s'il s'agit d'un problème de contrôle ou, de manière général, sur une fonction  $H(p,x,t,\Theta)$  quelconque définissant une équation d'Hamilton-Jacobi. C'est un tel théorème de convergence qui est présenté dans ce chapitre.

Bien sûr, dans le cas périodique, ce théorème s'interprète comme un résultat de convergence de la fonction valeur  $V^\epsilon$  du problème d'origine vers celle du problème moyenné. Nous verrons (chapitre V), après avoir généralisé la notion de problème moyenné, que ceci est également vrai dans le cas non périodique.

### Sur la démonstration

Une approche trajectorielle, utilisant les résultats présentés en annexe, présente le double désavantage de ne pas être très concluante et de ne pas épuiser la question. Une approche directe par étude de l'équation d'Hamilton-Jacobi bute sur la non unicité de la solution: c'est pourquoi il nous a paru intéressant de perturber le problème par l'adjonction d'un terme de viscosité  $\alpha V$  dans l'équation d'Hamilton-Jacobi, et gagner ainsi régularité et unicité. Si nous pouvons sérier les deux problèmes de limite en  $\alpha$  et en  $\epsilon$  et si nous pouvons répondre à la question pour  $\omega \neq 0$ , alors nous tiendrons la réponse pour  $\omega = 0$ ; Or la convergence des méthodes de viscosité évanescence est essentiellement un résultat spatial, en ce sens qu'elle ne dépend que de la régularité des données en espace; en particulier le taux de convergence est indépendant d' $\epsilon$ , qui ne représente que la "rapidité" du temps. Si  $V_\alpha^\epsilon$  représente la solution de l'équation d'Hamilton-Jacobi du second ordre pour un terme de viscosité  $\alpha$  et un temps rapide  $t/\epsilon$ , on a donc convergence uniforme des  $V_\alpha^\epsilon$  vers  $V_\alpha^0$ ,  $\alpha$  étant simplement un paramètre. C'est la démarche qui a été faite ici.

## 4.2 - Hypothèses

On considère:

$$\begin{aligned} (H_1) \quad H : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times [0, T] \times \mathbb{R}_+ &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (p, x, t, \theta) &\longmapsto H(p, x, t, \theta) \end{aligned}$$

borné uniformément continu dès que  $p$  est borné, c-à-d :

$$H \in \text{BUC}(\bar{B}_R \times \mathbb{R}^n \times [0, T] \times \mathbb{R}_+) \quad \text{pour tout } R > 0$$

$$\text{avec : } |H(p, x, t, \theta) - H(p, y, t, \theta)| \leq C(1+|p|)(|x-y|)$$

pour tout  $x, y, p, t, \theta$ .

Remarque: Si  $H$  représente l'Hamiltonien

$$H(p, x, t, \theta) = \inf_{u \in U} \{ p' f(x, u, t, \theta) + L(x, u, t) \}$$

$H$  vérifiera les hypothèses précédentes si  $f$  et  $L$  sont bornées, continues, Lipschitz en  $x$  et vérifient les hypothèses des § ( )

Notations:

$$\text{On note } L_{\text{unif}}^p(\mathbb{R}^n \times [0, T]) = \{ \varphi \in L_{\text{loc}}^p(\mathbb{R}^n \times [0, T], \mathbb{R}) ,$$

$$\sup_{y \in \mathbb{R}^n} \int_{|x-y| \leq 1} \int_{t \in [0, T]} |\varphi(x, t)|^p dx dt < +\infty \}$$

$$\text{et } W_{\text{unif}}^{2,1,p}(\mathbb{R}^n \times [0, T]) = \{ \varphi \in L_{\text{unif}}^p(\mathbb{R}^n \times [0, T]) ,$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} , \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} , \frac{\partial \varphi}{\partial t} \text{ sont des éléments de } L_{\text{unif}}^p(\mathbb{R}^n \times [0, T]) \}$$

$$\text{qu'on peut normer par } \sup_{y \in \mathbb{R}^n} \| \varphi \|_{W_{\text{unif}}^{2,1,p}(\bar{B}(y,1) \times [0, T])}$$

### 4.3 - Rappels

4.3.1 -  $W_1(K) \subset C^0(K)$  avec injection compacte si  $p > n+1$ , pour la topologie de la convergence uniforme ( $K$  compact de  $\mathbb{R}^n$ ) [4]. De plus,

$$\text{si } \varphi \in W_{\text{unif}}^{2,1,p}(\mathbb{R}^n \times [0,T])$$

et  $p > n+1$ , il existe  $C_p$  et  $\beta = 1 - \frac{n+1}{p}$  tels que:

$$\begin{aligned} |\varphi(x,t) - \varphi(y,t')| &< C_p \|\varphi\| (|x-y|^\beta + |t-t'|^\beta) \\ \left| \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,t) - \frac{\partial \varphi}{\partial x'}(x,t') \right| &< C_p \|\varphi\| (|x-y|^\beta + |t-t'|^\beta) \end{aligned}$$

pour tout  $x,y,t,t'$

### 4.3.2 - Equations paraboliques [6], [7]

Soit, pour  $T, \epsilon > 0$ ,  $\alpha > 0$ , l'équation :

$$(1) \quad \begin{cases} \frac{\partial v^\epsilon}{\partial t} + \alpha \Delta v^\epsilon + H\left(\frac{\partial v^\epsilon}{\partial x}, x, t, \frac{t}{\epsilon}\right) = 0 \text{ sur } \mathbb{R}^n \times [0,T] \\ v^\epsilon_\alpha(x,T) = 0 \end{cases}$$

Alors pour tout  $p > 1$  il existe une unique solution  $v^\epsilon_\alpha$  de (1)

dans  $W_{\text{unif}}^{2,1,p}(\mathbb{R}^n \times [0,T])$ , et donc une unique solution appartenant

à  $W_{\text{unif}}^{2,1,p}(\mathbb{R}^n \times [0,T])$  pour tout  $p > 1$ .

De plus il existe  $k_1$  (resp  $k_2$ ) ne dépendant que de

$\alpha, T, n, p$  (resp  $T, n, p$ ) tel que

$$\|v^\epsilon_\alpha\|_{W_{\text{unif}}^{1,2,p}(\mathbb{R}^n \times [0,T])} \leq k_1 \quad \text{et}$$

$$\sup_{\mathbb{R}^n \times [0,T]} \left( \left| \frac{\partial v^\epsilon}{\partial x}(x,t) \right| + \left| \frac{\partial v^\epsilon}{\partial t}(x,t) \right| \right) \leq k_2$$

#### 4.3.3 - Equation déterministe [9]

Soit l'équation d'Hamilton-Jacobi:

$$(2) \quad \begin{cases} \frac{\partial V^\epsilon}{\partial t} + H\left(\frac{\partial V^\epsilon}{\partial x}, x, t, \frac{t}{\epsilon}\right) = 0 & \text{sur } \mathbb{R}^n \times [0, T] \\ V^\epsilon(x, T) = 0 \end{cases}$$

Alors il existe une unique solution de viscosité de (2).

et  $V^\epsilon \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^n \times [0, T])$  ; si  $H$  représente l'hamiltonien d'un problème de contrôle,  $V^\epsilon$  en est la fonction valeur.

#### 4.3.4 - Viscosité évanescante [9]

Pour  $\alpha > 0$  borné, il existe  $k'$  ne dépendant que de  $C$ ,  $n$  et  $T$  tel que pour tout  $\epsilon > 0$  on ait:

$$\|V_\alpha^\epsilon - V^\epsilon\|_{C^0(\mathbb{R}^n \times [0, T])} < k' \sqrt{\alpha}$$

#### 4.4 - Hypothèse de moyenne

On fera également l'hypothèse de moyenne suivante sur  $H$ :

(H<sub>2</sub>) il existe  $\bar{H} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times [0, T] \longrightarrow \mathbb{R}$  tel que:

$$\sup_{t \geq 0} \left| \frac{1}{\tau} \int_t^{t+\tau} H(p, x, t, \theta) d\theta - \bar{H}(p, x, t) \right| \xrightarrow{\tau \rightarrow +\infty} 0$$

pour tout  $p, x, t$

Remarque: si  $H$  vérifie les hypothèses (H<sub>1</sub>) alors  $\bar{H}$  également, à ceci près que  $\bar{H}$  est indépendant de  $\theta$ . En particulier tout ce qui précède s'applique à  $\bar{H}$ , à condition d'ignorer, bien sûr, le paramètre  $\epsilon$ . En particulier, si  $f$  et  $L$  vérifient les hypothèses du chapitre I,  $\bar{H}$  est l'hamiltonien du problème moyenné et  $V_\alpha$  pour  $\alpha=0$  sa fonction valeur

Nous pouvons passer à la démonstration du théorème suivant:

#### 4.5 - Théorème (4.1)

Soit  $H$  vérifiant les hypothèses  $(H_1)$  et  $(H_2)$ ,  $v^\epsilon$  la solution de (1) pour  $\epsilon > 0$  et  $v_\alpha$  la solution de (1) pour  $H = \bar{H}$ . Alors  $v^\epsilon_\alpha$  converge vers  $v_\alpha$  quand  $\epsilon$  tend vers 0, uniformément sur tout compact de  $R^n \times [0, T]$ .

Démonstration:

Considérons  $\alpha$  fixe et  $\epsilon$  décrivant  $]0, 1[$ , alors la famille  $v^\epsilon_\alpha$  est relativement faiblement compacte dans:

$$W^{2,1,p}_{unif}(R^n \times [0, T])$$

pour tout  $p > 0$  et donc, pour  $p$  assez grand, la famille

$$\{(v^\epsilon_\alpha, \frac{\partial v^\epsilon_\alpha}{\partial x})\} \text{ est relativement compacte dans } [C^0(K \times [0, T])]^2 \text{ pour tout } K$$

compact de  $R^n$ ; et donc, de toute suite  $(v^\epsilon_n, \frac{\partial v^\epsilon_n}{\partial x})$  on peut extraire

une sous suite convergeant uniformément sur tout compact.

$$\text{Soit } \bar{v}_\alpha \in W^{1,2,p}_{unif}(R^n \times [0, T]) \quad (p > n+1) \text{ une valeur}$$

d'adhérence correspondant à une suite  $\epsilon_n, \epsilon_n \rightarrow 0$   
 $n \rightarrow \infty$

De par l'unicité de la solution de (1) nous aurons prouvé la convergence si  $v^\alpha$

vérifie (1), c'est-à-dire si, pour tout fonction test  $\varphi \in C^\infty_0(R^n \times [0, T])$  à support compact on a:

$$\int_0^T dt \int_{R^n} dx \left[ \frac{\partial \bar{v}_\alpha}{\partial t}(x, t) + \alpha \Delta \bar{v}_\alpha(x, t) + H\left(\frac{\partial \bar{v}_\alpha}{\partial x}(x, t), x, t\right) \right] \varphi(x, t) = 0$$

(puisque  $\bar{v}_\alpha(x, T) = v^\epsilon_\alpha(x, T) = 0$ )

Or cette quantité est la somme de trois termes  $T_1^\epsilon + T_2^\epsilon + T_3^\epsilon$

avec :

$$T_1^e = \int_0^T dt \int_{R^n} dx \, \varphi(x, t) \left[ \frac{\partial V^\alpha}{\partial t} - \frac{\partial \bar{V}^\alpha}{\partial t} + \alpha \Delta \bar{V}^\alpha - \alpha \Delta \bar{V}^\alpha \right]$$

$$T_2^e = \int_0^T dt \int_{R^n} dx \, \varphi(x, t) \left[ H\left(\frac{\partial \bar{V}}{\partial x}^\alpha(x, t), x, t, \frac{t}{\epsilon}\right) - H\left(\frac{\partial V}{\partial x}^\alpha(x, t), x, t, \frac{t}{\epsilon}\right) \right]$$

$$T_3^e = \int_0^T dt \int_{R^n} dx \, \varphi(x, t) \left[ \bar{H}\left(\frac{\partial \bar{V}}{\partial x}^\alpha(x, t), x, t, \frac{t}{\epsilon}\right) - H\left(\frac{\partial V}{\partial x}^\alpha(x, t), x, t, \frac{t}{\epsilon}\right) \right]$$

Où  $T_1^e \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} 0$  par convergence faible.

D'autre part  $T_2^e \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} 0$  par Lebesgue dominé, puisque les quantités

sous le signe somme sont bornées sur le support de  $\varphi$

Il nous reste à estimer  $T_3$  : soit  $D$  un entier  $> 0$ ,

$t_k = k \frac{T}{D}$  pour  $k \in [0, D-1]$  et

$$h_D^e : R^n \times [0, T[ \longrightarrow R \\ t \longmapsto h_D^e(x, t)$$

$$\text{avec } h_D^e(x, t) = H\left(\frac{\partial \bar{V}}{\partial x}^\alpha(x, t_k), x, t_k, \frac{t}{\epsilon}\right)$$

$$\text{si } t \in [t_k, t_{k+1}[$$

$$\text{et } \bar{h}_D : R^n \times [0, T[ \longrightarrow R \\ t \longmapsto \bar{h}_D(x, t)$$

$$\text{avec } \bar{h}_D(x, t) = \bar{H}\left(\frac{\partial \bar{V}}{\partial x}^\alpha(x, t_k), x, t_k\right)$$

$$\text{si } t \in [t_k, t_{k+1}[$$

est enfin  $\varphi_D$ , discrétisée de  $\varphi$  suivant le même procédé.

$H$  étant uniformément continu pour  $p$  borné et  $x$  dans le domaine  $\mathcal{V}$ ,

$\frac{\partial V}{\partial x}^\alpha$  étant bornée et continue, on en déduit que,  $x$  étant fixé :



$$\left\{ \begin{array}{l} \sup_{t \in [0, T]} \left| h_D^\epsilon(x, t) - H \left( \frac{\partial \bar{V}}{\partial x} (x, t), x, t, \frac{t}{\epsilon} \right) \right| \leq o \left( \frac{1}{D} \right) \\ \sup_{t \in [0, T]} \left| \bar{h}_D(x, t) - \bar{H} \left( \frac{\partial \bar{V}}{\partial x} (x, t), x, t \right) \right| \leq o \left( \frac{1}{D} \right) \\ \sup_{t \in [0, T]} \left| \varphi_D(x, t) - \varphi(x, t) \right| \leq o \left( \frac{1}{D} \right) \end{array} \right.$$

où  $o\left(\frac{1}{D}\right) \xrightarrow[D \rightarrow \infty]{} 0$  indépendamment de  $\epsilon$

Il nous suffit donc de montrer que

$$\int_0^T dt \int_{\mathbb{R}^n} dx \varphi_D(x, t) [h_D^\epsilon(x, t) - \bar{h}_D(x, t)] \xrightarrow[\epsilon \rightarrow 0]{} 0$$

$$\text{or } \left| \int_0^T [h_D^\epsilon(x, t) - \bar{h}_D(x, t)] \varphi_D(x, t) dt \right|$$

$$= \left| \sum_{k=0}^{D-1} \varphi(x, \frac{t}{k}) \int_{t_k}^{t_k + \frac{T}{D}} [H \left( \frac{\partial \bar{V}}{\partial x} (x, t_k), x, t_k, \frac{t}{\epsilon} \right) - H \left( \frac{\partial \bar{V}}{\partial x} (x, t_k), x, t_k \right)] dt \right|$$

$$< \|\varphi\|_{C^0} \frac{T}{D} \sum_{k=1}^{D-1} \frac{D\epsilon}{T} \left| \int_{\frac{t_k}{\epsilon}}^{\frac{t_k}{\epsilon} + \frac{T}{D\epsilon}} [H \left( \frac{\partial \bar{V}}{\partial x} (x, t_k), x, t_k, \Theta \right) - \bar{H} \left( \frac{\partial \bar{V}}{\partial x} (x, t_k), x, t_k \right)] dt \right|$$

$$< \|\varphi\|_{C^0} T \sup_{\substack{t \geq 0 \\ t = t_k, k \in [0, D-1]}} \left| \frac{2}{\left(\frac{T}{D\epsilon}\right)} \int_t^{t + \frac{T}{D\epsilon}} [H(p, x, t, \Theta) - H(p, x, t)] dt \right|$$

$$p = \frac{\partial \bar{V}}{\partial x} (x, t_k)$$

$\Rightarrow \varphi_1(D, \epsilon), \varphi_1(D, \epsilon) \xrightarrow[\epsilon \rightarrow 0]{} 0$ . Soit  $\eta > 0$ ,  $D$  tel que  $o\left(\frac{1}{D}\right) < \frac{\eta}{2}$

et  $\epsilon_c > 0$  tel que, pour  $\epsilon < \epsilon_c$  on ait  $\varphi_1(D, \epsilon) < \frac{\eta}{2}$ ; alors pour

$$\left| \int_0^T dt \, \Psi(x,t) \left[ \left( \frac{\partial \bar{V}}{\partial x} \right)^\alpha (x,t), x, t \right) - H \left( \left( \frac{\partial \bar{V}}{\partial x} \right)^\alpha (x,t), x, t, \frac{t}{\epsilon} \right) \right] \right| < \eta$$

et donc ce terme tend vers 0 quand  $\epsilon$  tend vers 0, ceci pour tout  $x$

On en déduit que  $T_3^\epsilon \xrightarrow[\epsilon \rightarrow 0]{} 0$  par Lebesgue dominé

$$\text{Or } \left| \int_0^T dt \int_{\mathbb{R}^n} dx \left[ \left( \frac{\partial \bar{V}}{\partial x} \right)^\alpha (x,t) + \alpha \Delta \bar{V}_\alpha(x,t) + H \left( \left( \frac{\partial \bar{V}}{\partial x} \right)^\alpha (x,t), x, t \right) \right] \Psi(x,t) \right|$$

$$< T_1^\epsilon + T_2^\epsilon + T_3^\epsilon \text{ pour tout } \epsilon$$

$$\text{avec } T_1^\epsilon + T_2^\epsilon + T_3^\epsilon \rightarrow 0, \text{ ceci pour tout } \Psi,$$

et donc  $\bar{V}_\alpha = V_\alpha$ . Il y a donc une unique valeur d'adhérence,  
d'où convergence

En supposant un peu plus de régularité sur  $H$  et une hypothèse de moyenne plus forte, on obtient la convergence uniforme sur  $\mathbb{R}^n \times [0,T]$ :

#### 4.6 - Théorème (4.2) (convergence uniforme globale)

Soit  $H$  vérifiant  $(H_1)$ , l'hypothèse de moyenne  $(H_2)$  avec de plus:

$(H_3)$   $H$  est localement lipschitz en  $p$

$$(H_4) \quad \sup_{\substack{\hat{t} > 0 \\ x \in \mathbb{R}^n}} \left| \frac{1}{\tau} \int_{\hat{t}}^{\hat{t}+\tau} H(p, x, t, \theta) d\theta - \bar{H}(p, x, t) \right| \xrightarrow[\tau \rightarrow +\infty]{} 0$$

Alors  $V_\alpha^\varepsilon$  converge uniformément vers  $V_\alpha$  sur  $\mathbb{R}^n \times [0, T]$

Remarques: a) l'hypothèse  $(H_4)$  est raisonnable. En effet, supposons  $H$  indépendant de  $p$  et  $t$  et la convergence de  $V_\alpha^\varepsilon$  vers  $V_\alpha$  uniforme sur  $\mathbb{R}^n \times [0, T]$ . On en déduit rapidement que  $V^\varepsilon$  converge uniformément vers  $V$ . Or:

$$V^\varepsilon(x, t) = \int_t^T H(x, \frac{t}{\varepsilon}) dt = (T-t) \frac{\varepsilon}{T-t} \int_{\frac{t}{\varepsilon}}^{\frac{T-t}{\varepsilon}} H(x, \theta) d\theta$$

doit converger uniformément vers  $V(x, t) = (T-t)\bar{H}(x)$ ; on en déduit la convergence uniforme en  $x$  des moyennes.

b) la première hypothèse de moyenne  $(H_2)$  est plus forte qu'il n'y paraît, puisque, de la régularité de  $H$  on peut déduire que la convergence des moyennes vers  $\bar{H}$  est uniforme sur tout compact de  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times [0, T]$ , par le théorème d'Ascoli

c) Compte tenu de la remarque précédente, l'hypothèse de moyenne  $(H_4)$  ci-dessus peut se réécrire:

$$\sup_{\substack{\hat{t} > 0 \\ t \in [0, T] \\ x \in \mathbb{R}^n \\ |p| < r}} \left| \frac{1}{\tau} \int_{\hat{t}}^{\hat{t}+\tau} H(p, x, t, \theta) d\theta - \bar{H}(p, x, t) \right| \xrightarrow[\tau \rightarrow +\infty]{} 0$$

pour tout  $r$  positif.

Commençons par démontrer le lemme suivant:

**Lemme**

Soit  $(B_k)_{k \in \mathbb{N}}$  une suite de fonctions de  $L^{\infty}(\mathbb{R}^n \times [0, T], \mathbb{R}^n)$  bornées indépendamment de  $k$

$(h_k)_{k \in \mathbb{N}}$  une suite de fonctions de  $\mathbb{R}^n \times [0, T]$  dans  $\mathbb{R}$ , bornées indépendamment de  $k$ , équi-uniformément continues, et vérifiant:

$(H_5)$  pour tout fonction  $\varphi \in C^0$  de  $[0, T]$  dans  $\mathbb{R}$ ,

$$\int_0^T \varphi(t) h_k(x, t) dt \longrightarrow 0 \quad ; \quad \text{pour tout } x \text{ de } \mathbb{R}^n \\ k \rightarrow \infty$$

$(W_k)_{k \in \mathbb{N}}$  une suite de fonctions appartenant à  $W_{\text{unif}}^{2,1,p}(\mathbb{R}^n \times [0, T])$

pour tout  $p > 1$ , bornées dans  $W_{\text{unif}}^{2,1,p}$  indépendamment de  $k$  et vérifiant:

$$\begin{cases} \frac{\partial W_k}{\partial t} + B'_k(x, t) \frac{\partial W_k}{\partial x}(x, t) + \alpha \Delta W_k + h_k(x, t) = 0 \\ W_k(x, T) = 0 \end{cases}$$

Alors  $W_k$  converge vers 0 quand  $k$  tend vers l'infini, uniformément sur tout compact de  $\mathbb{R}^n \times [0, T]$

**Démonstration du lemme**

En raison des mêmes arguments de faible relative compacité dans  $W^{2,1,p}$  que ceux utilisés dans la démonstration précédente, il nous suffit pour conclure de montrer que toute sous-suite de  $W_k$ , faiblement convergente dans

$W_{\text{unif}}^{2,1}, B'(\mathbb{R}^n \times [0, T])'$ , convergeant uniformément, ainsi que son gradient,

sur tout compact de  $\mathbb{R}^n \times [0, T]$ , ne peut avoir qu'une limite nulle.

Considérons donc une telle sous-suite convergente, que nous nommerons également  $W_k$  pour simplifier les notations, et notons  $W$  sa limite; nous allons montrer que  $W$  vérifie une équation du type:

$$\frac{\partial \bar{W}}{\partial t} + B \frac{\partial \bar{W}}{\partial x} + \alpha \Delta \bar{W} = 0 \quad , \quad \bar{W}(x, T) = 0.$$

Remarquons que la suite  $(B_k)$  est relativement faiblement compacte dans  $L^\infty$ , quitte à renuméroter, nous pouvons supposer que  $B_k$  converge faiblement vers une fonction  $B$  dans  $L^\infty(R^n \times [0, T], R^n)$ .

Soit  $\varphi$  une fonction test,  $C^\infty$  à support compact dans  $R^n \times [0, T]$ . Nous avons :

$$\int_{R^n} dx \int_0^T dt \varphi(x, t) \left[ -\frac{\partial W_k}{\partial t} + B_k' \frac{\partial W_k}{\partial x} + \alpha \Delta W_k + h_k \right] = 0$$

or :  $\int_{R^n} dx \int_0^T dt \varphi(x, t) \left[ -\frac{\partial W_k}{\partial t} + \alpha \Delta W_k \right]$  converge vers :

$$\int_{R^n} dx \int_0^T dt \varphi(x, t) \left[ -\frac{\partial \bar{W}}{\partial t} + \alpha \Delta \bar{W} \right], \text{ par convergence faible}$$

$\int_0^T \varphi(x, t) h_k(x, t) dt$  converge vers 0 et donc

$$\int_{R^n} dx \int_0^T dt \varphi(x, t) h_k(x, t) \text{ converge vers 0 d'après le}$$

théorème de Lebesgue.

$$\int_0^T dx \varphi(x, t) B_k' \left[ -\frac{\partial W_k}{\partial x} - \frac{\partial \bar{W}}{\partial x} \right] \text{ converge vers 0 par convergence}$$

uniforme de  $\frac{\partial W_k}{\partial x}$ , et donc  $\int_{R^n} dx \int_0^T dt \varphi(x, t) B_k' \left[ -\frac{\partial W_k}{\partial x} - \frac{\partial \bar{W}}{\partial x} \right]$  converge

vers 0 (Lebesgue).

$$\int_{R^n} dx \int_0^T dt \varphi(x, t) [B_k - B]' \frac{\partial \bar{W}}{\partial x} \text{ converge vers 0 par convergence}$$

faible de  $B_k$  vers  $B$

et  $W$  vérifie donc, pour tout  $\varphi$  de  $\mathcal{D}(R^n \times [0, T], R)$  :

$$\int_{R^n} dx \int_0^T dt \varphi(x, t) \left[ -\frac{\partial W}{\partial t} + \alpha \Delta W + B \frac{\partial W}{\partial x} \right] = 0$$

Nous pouvons maintenant passer à la démonstration du théorème proprement dit, en commençant par montrer qu'à  $t$  fixé, la convergence de  $V_\alpha^e$  vers  $V_\alpha$  est nécessairement uniforme sur  $R^n$ .

En effet, supposons qu'il n'en soit pas ainsi. Il existe alors  $\delta > 0$ , une suite  $\epsilon_k, \epsilon_k \rightarrow 0$  de réels positifs et une suite  $x_k$  de point  $R^n$  tels que:

$$(1) \quad \left| V_\alpha^{\epsilon_k}(x_k, t) - V_\alpha(x_k, t) \right| > \delta \text{ pour tout } k.$$

Posons  $W_k(x, t) = V_\alpha^{\epsilon_k}(x - x_k, t) - V_\alpha(x - x_k, t)$ ,

$$B_k(x, t) = \int_0^1 \frac{\partial B}{\partial p} \left( \frac{\partial V}{\partial x}(x - x_k, t) + \lambda W_k(x, t), x - x_k, t, \frac{t}{\epsilon_k} \right) d\lambda$$

$$h_k(x, t) = -H\left(\frac{\partial V}{\partial x}(x - x_k, t), x - x_k, t\right) - H\left(\frac{\partial V}{\partial x}(x - x_k, t), x - x_k, t, \frac{t}{\epsilon_k}\right)$$

Alors les  $W_k$  forment une suite bornée de  $W_{\text{unif}}^{2,1,p}(R^n \times [0, T])$  pour tout  $p > 1$ , les  $B_k$  une suite bornée de  $L^\infty(R^n \times [0, T], R^n)$  de par l'hypothèse  $(H_3)$  et les  $W_k$  vérifient:

$$\begin{cases} \frac{\partial W_k}{\partial t} + B_k'(x, t) \frac{\partial W_k}{\partial x}(x, t) + \alpha \Delta W_k + h_k(x, t) = 0 \text{ pp } x, t \\ W_k(x, T) = 0 \end{cases}$$

Enfin les  $h_k$  ont visiblement la régularité requise: il nous reste à vérifier  $(H_5)$  pour pouvoir appliquer le lemme précédent. Il nous suffit en fait de montrer (après discrétisation et "gel du temps lent" comme dans la démonstration du théorème (4.1)) que, pour tout  $D > 0, t \in [0, T], x \in R^n$

$$\sup_{\wedge} \left| \int_{\wedge}^{\hat{t} + \frac{T}{D}} \left[ H\left(\frac{\partial V}{\partial x}(x - x_k, t), x - x_k, t\right) - H\left(\frac{\partial V}{\partial x}(x - x_k, t), x - x_k, t, \frac{t}{\epsilon_k}\right) \right] dt \right|$$

tend vers 0 quand  $k$  tend vers l'infini

Or on peut majorer cette expression par:

$$\sup_{\substack{\epsilon > 0 \\ |p| \leq \epsilon_2 \\ x \in \mathbb{R}^n}} \left| \epsilon_k \int_t^{\hat{t} + \frac{T}{D}} [\bar{H}(p, x, t) - H(p, x, t, \theta)] d\theta \right| ,$$

qui tend vers 0 quand  $k$  tend vers l'infini, ceci par hypothèse. On notera l'importance de la convergence uniforme, puisque  $x - x_k$  est lié à la valeur d' $\epsilon$ ,  $\epsilon = \epsilon_k$ .

Nous pouvons donc appliquer le lemme précédent et en déduire la convergence uniforme de  $W_k$  vers 0 sur tout compact et, en particulier, la convergence ponctuelle en 0: or ceci est contradictoire avec (3).

Nous avons donc convergence uniforme de  $V_\alpha^\epsilon$  vers  $V_\alpha$  à  $t$  fixé.

La convergence uniforme sur  $\mathbb{R}^n \times [0, T]$  s'en déduit aisément, puisque les  $V_\alpha^\epsilon$  sont Lipschitz en  $t$  indépendamment d' $\epsilon$ .

#### (4.7) Corollaire

Soit  $H$  vérifiant  $(H_1)$  et l'hypothèse de moyenne  $(H_2)$ ,  $V^\epsilon$  solution de viscosité de (2) pour  $\epsilon > 0$ ,  $V$  solution de viscosité de (2) pour  $H = H$ .

Alors  $V^\epsilon$  converge uniformément vers  $V$  sur tout compact de  $\mathbb{R}^n \times [0, T]$ .

Si en outre  $H$  vérifie  $(H_3)$  et l'hypothèse de moyenne uniforme  $(H_4)$ , alors  $V^\epsilon$  converge uniformément sur  $\mathbb{R}^n \times [0, T]$ .

Preuve: La convergence de  $V_\alpha^\epsilon$  vers  $V^\epsilon$  est uniforme pour  $(\epsilon, x, t)$  décrivant  $]0, 1[ \times \mathbb{R}^n \times [0, T]$  et celle de  $V_\alpha$  vers  $V$  uniforme sur  $\mathbb{R}^n \times [0, T]$ .

#### 4.8 - Remarque: cas périodique

a) Si  $H(p, x, t, \theta) = \inf_{u \in U^{ad}} \{p^T f(x, u, t, \theta) + L(x, u, t)\}$

alors H est périodique en  $\theta$  et H a toujours une moyenne; de fait

$$\bar{H}(p, x, t) = \frac{1}{\omega} \int_0^\omega H(p, x, t, \theta) d\theta.$$

De plus, si  $U^{ad}$  est compact, ou si la minimisation à  $p, x, t$ , fixés, peut se faire en restreignant  $u^{ad}$  à un compact indépendant de  $\theta$  (par une hypothèse de convexité, par exemple), alors:

$$\bar{H}(p, x, t) = \min_{v \in W^{ad}} \left( p^T \frac{1}{\omega} \int_0^\omega f(x, v, (\theta), t, \theta) + \frac{1}{\omega} \int_0^\omega L(x, v(\theta), t) \right)$$

où  $W^{ad}$  a été défini dans le chapitre I, et H représente donc l'hamiltonien du problème moyen.

On en déduit que si H vérifie  $(H_1)$ , alors la fonction valeur du problème  $(P_\varepsilon)$  converge uniformément sur tout compact vers celle du problème moyen.

H vérifiera  $(H_1)$  si, par exemple, f et L sont bornées et uniformément continues.

b) En fait, le résultat de convergence se généralise facilement aux cas du type:

f sous linéaire,  $f(x)(1+|x|+|u|)$ , Lipschitz en x

L sous quadratique, localement Lipschitz en x

$L(x, u, t) > k(-1+|u|^2)$ , et  $u \in L^2$

En effet un calcul classique permet de montrer que les trajectoires optimales pour le problème  $P_\varepsilon$  restent nécessairement dans un domaine borné, adapté au caractère récursif de la fonction valeur, et estimable a priori. Par exemple si on pose  $\alpha = k^2(1+2k)$ ,  $\beta = k^2(1+k)$  et  $Q(x) = \{(x, t) \in \mathbb{R}^n \times [0, T], |x|^2 \leq (\alpha/\beta) + (x^2 + \alpha/\beta)e^{\beta t}\}$ , en supposant que  $0 \in U^{ad}$ , alors la valeur de  $V^\varepsilon$  et V sur  $Q(x)$  ne dépend que des valeurs de f et L sur  $Q(x)$ .

Dès lors, on peut modifier f et L en dehors de  $Q(x)$  de manière à les rendre



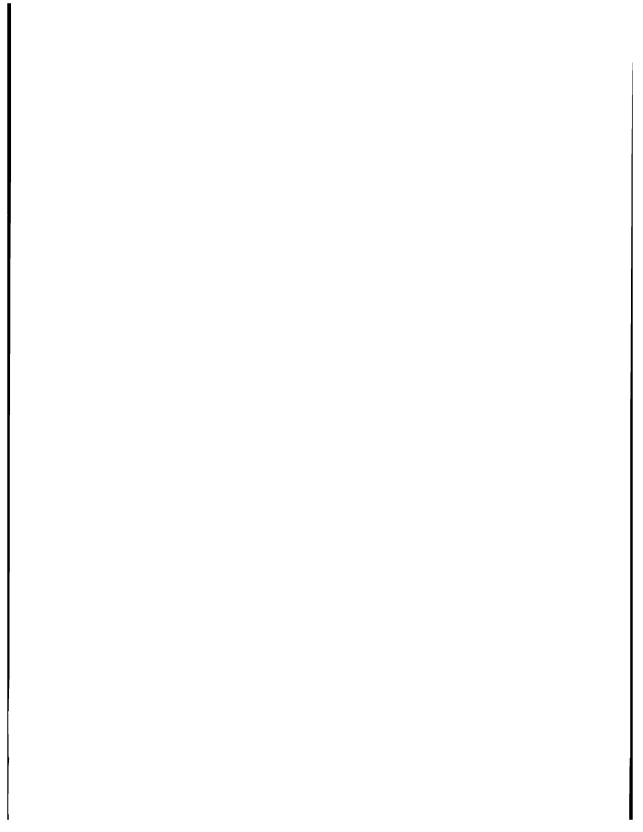
bornées et, si par exemple  $L$  n'est que localement Lipschitz en  $x$ , la rendre globalement Lipschitz.

La convergence se démontre alors sur la restriction de  $V^\epsilon$  et  $V$  à  $Q(r)$ , c'est-à-dire, finalement, sur tout compact de  $\mathbb{R}^n \times [0, T]$ .

Note: La remarque ci-dessus est évidemment valable si  $f$  et  $L$  ne sont pas périodiques.

## CHAPITRE V

### PROBLEME MOYENNE



# V - DEFINITION DU PROBLEME MOYENNE DANS LE CAS NON-PERIODIQUE

## 5.1 - Introduction

Nous considérerons ici

$$\left\{ \begin{array}{l} f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^D \times [0, T] \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^n \\ \quad (x, u, t, \theta) \longrightarrow f(x, u, t, \theta) \\ L : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^D \times [0, T] \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R} \\ \quad (x, u, t, \theta) \longrightarrow L(x, u, t, \theta) \end{array} \right.$$

avec

$$\left\{ \begin{array}{l} f \in \text{BUC}(\bar{B}_r^n \times \bar{B}_r^D \times [0, T] \times \mathbb{R}_+, \mathbb{R}^n) \\ \quad \text{pour tout } r > 0 \\ L \in \text{BUC}(\bar{B}_r^n \times \bar{B}_r^D \times [0, T] \times \mathbb{R}_+, \mathbb{R}) \\ \quad \text{où } \bar{B}_r^n \text{ désigne la boule fermée de } \mathbb{R}^n, \text{ de centre } 0 \\ \quad \text{et de rayon } r, \\ \quad \text{et } \bar{B}_r^D \text{ l'analogue dans } \mathbb{R}^D \\ \text{et } f \text{ est Lipschitz en } x \end{array} \right.$$

auxquelles nous pouvons associer la famille de problèmes:

$$P_e \left\{ \begin{array}{l} \text{minimiser } J^e(u) = \int_0^T L(x(t), u(t), t, \frac{t}{e}) dt \\ \text{sachant que } u \in L^1([0, T], \mathbb{R}^D), u(t) \in U^{\text{ad}} \text{ pp } t \\ \text{et } \left\{ \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = f(x(t), u(t), t, \frac{t}{e}) \text{ pp } t, x(t) \in \mathbb{R}^n \\ x(0) = x_0 \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Dans le cas où  $f$  est périodique en  $\theta$  (et  $L$  indépendant de  $\theta$ , puisque c'était le cadre dans lequel nous nous étions placés) nous retrouvons le problème

$P_c$  défini dans le chapitre I

Nous avons vu (cf. chapitre IV), qu'à condition de satisfaire à une hypothèse de moyenne sur le minimum de l'hamiltonien:  $p'f+L$  et à quelques estimations sur  $f$  et  $L$  (bornées, ou autres hypothèses: cf. remarque (4.7)), la fonction valeur  $V^c$  du problème moyenné converge uniformément sur tout compact vers une fonction  $V$ , solution de viscosité de l'équation d'Hamilton Jacobi dont l'hamiltonien est la moyenne de l'hamiltonien suivant:

$$\min_{u \in U^{ad}} P'f(x, u, t, \theta) + L(x, u, t, \theta),$$

que nous avons noté  $\bar{H}(p, x, t)$ . En particulier  $\bar{H}$  est concave en  $p$ , lipschitz en  $p$  (localement) donc continu en  $p$  et présente donc toutes les caractéristiques d'un hamiltonien de contrôle optimal. Nous savons d'ailleurs que, dans le cas périodique,  $\bar{H}$  représente l'hamiltonien du problème moyenné (\*) défini au chapitre I

La question se pose donc de généraliser ce résultat au cas non périodique, c'est-à-dire de définir un problème que nous appellerons moyenné, dont la fonction valeur soit  $V$ , c'est-à-dire dont  $H$  soit l'Hamiltonien minimum.

Nous proposons dans ce qui suit une notion de problème moyenné directement inspirée de la notion d'équation différentielle moyennée présentée en annexe, et dont l'hamiltonien minimisé vaut  $H$ .

---

(\*) À condition, par exemple, de supposer que la minimisation en  $u$ , à  $x$  et  $t$  fixés, peut se faire sur un compact indépendant de  $\theta$ , de manière à récupérer un  $\arg.\min$  mesurable en  $\theta$ .

## 5.2 - Problème moyenné

Si nous avons à considérer une moyenne, il semble qu'elle soit du type:

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} f(x, u, t, \theta) d\theta, \text{ et de même sur } L$$

Si nous voulons généraliser l'ensemble  $W^{ad}$  des valeurs de contrôle admissibles (cf. chapitre I) nous pouvons penser à:

$$W^{ad} = \{ v \in L^1_{unif}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^p), v(\theta) \in U^{ad} \text{ pp } \theta \text{ et}$$

$$\frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} f(x, u(\theta), t, \theta) d\theta \text{ a une limite quand } \tau \rightarrow +\infty,$$

pour tout  $x, t$ , et de même pour  $L$  )

on notera  $\bar{f}(x, u, t)$  la moyenne de  $f$  et  $\bar{L}(x, u, t)$  celle de  $L$ .

On s'assurera que  $W^{ad}$  est non vide(\*) en supposant, par exemple, qu'il contient les fonctions constantes à valeur dans  $U^{ad}$ , soit:

$$\frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} f(x, u, t, \theta) d\theta \text{ et } \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} L(x, u, t, \theta) d\theta$$

convergent quand  $\tau$  tend vers  $+\infty$  pour tout  $(x, u, t) \in \mathbb{R}^n \times U^{ad} \times [0, T]$ .

La dynamique est alors donnée par:

$$\frac{dx}{dt} = \bar{f}(x(t), v(t), t), \quad x(0) = x_0, x(t) \in \mathbb{R}^n$$

$$v \in L^1([0, T], L^1_{unif}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^p)) \text{ avec } v(t) \in U^{ad} \text{ ppt}$$

---

(\*) Hypothèse non nécessaire, d'ailleurs, car le théorème (5.1) exhibe des éléments de  $W^{ad}$

Le coût à minimiser est:

$$J(v) = \int_0^T \tilde{L}(x(t), v(t), t) dt$$

L'hamiltonien de ce problème est défini pour  $v$  dans  $W^{ad}$  par:

$$\tilde{h}(p, x, v, t) = p' \tilde{f}(x, v, t) + \tilde{L}(x, v, t)$$

Nous pourrions identifier la fonction valeur de ce problème à  $V$  (cf chap IV)

si  $\tilde{H}(p, x, t) = \min_{v \in W^{ad}} \tilde{h}(p, x, v, t)$  ceci pour tout  $p, x, t, .$

La question est non triviale: en ce sens que rien nous assure qu'un argument de minimisation de  $H$  (donc dépendant de  $\Theta$ ) soit admissible du point de vue de la moyenne en  $f$  et  $L$ , puisqu'à priori on n'a de moyenne que sur une combinaison linéaire des deux, en l'occurrence l'hamiltonien  $H$ . Néanmoins, si  $H$  admet une moyenne pour tout  $p$ , cette hypothèse est suffisamment forte pour conclure: essentiellement, si  $H$  a une moyenne  $\bar{H}$  pour tout  $p$ , alors là où  $\partial H / \partial p$  existe,  $\partial H / \partial p$  a une moyenne qui vaut  $\partial \bar{H} / \partial p$ ; et  $\partial H / \partial p$  vaut  $f$  en ces points.

C'est sur cette idée que s'appuie la démonstration du théorème suivant qui identifie  $H$  au minimum de  $h$  sur  $W^{ad}$ .

Nous ignorerons provisoirement la dépendance de  $H$  et  $h$  en  $x$  et  $t$ , pour ne nous préoccuper que de  $p, u$  et  $\Theta$ .

### 5.3 - Théorème (5.1): Hamiltonien du problème moyenné

Soient:  $U^{ad}$  une partie fermée non vide de  $R^p$

$$f : R^p \times R_+ \longrightarrow R^n$$

$$(u, \theta) \longrightarrow f(u, \theta)$$

$$L : R^p \times R_+ \longrightarrow R$$

$$(u, \theta) \longrightarrow L(u, \theta)$$

#### Hypothèses

(H<sub>1</sub>) On supposera que  $f$  et  $L$  sont dans  $BUC(B \times R_+)$  pour toute partie  $B$  bornée de  $R^p$ .

(H<sub>2</sub>) On supposera également que la minimisation par rapport à  $u$  dans  $U^{ad}$  de l'Hamiltonien:  $h(p, u, \theta) = p' f(u, \theta) + L(u, \theta)$ , lorsque  $\theta$  décrit  $R_+$  et  $p$  décrit un domaine borné de  $R^n$ , peut se faire un compact de  $U^{ad}$  indépendant de  $p$  et  $\theta$ .

#### Notations

On notera  $W^{ad}$  l'ensemble (éventuellement vide) des fonctions  $v$  de  $R_+$  dans  $R^p$ , localement intégrables, à valeur presque partout dans  $U^{ad}$  telles que:

$$\frac{1}{\tau} \int_0^\tau f(v(\theta), \theta) d\theta \text{ a une limite } \bar{f}(v) \text{ lorsque } \tau \longrightarrow +\infty$$

$$\text{et } \frac{1}{\tau} \int_0^\tau L(v(\theta), \theta) d\theta \text{ a une limite } \bar{L}(v) \text{ lorsque } \tau \longrightarrow +\infty$$

Pour  $v$  dans  $W^{ad}$ , on note  $\bar{H}(p, v)$  la quantité  $p' \bar{f}(v) + \bar{L}(v)$

(H<sub>3</sub>) Enfin, on suppose que, pour tout  $p$  dans  $R^n$ , l'Hamiltonien

$$H(p, \theta) = \min_{u \in U} h(p, u, \theta) \text{ a une moyenne } \bar{H}(p), \text{ c'est-à-dire que:}$$

$$\frac{1}{\tau} \int_0^\tau H(p, \theta) d\theta \longrightarrow \bar{H}(p) \text{ lorsque } \tau \longrightarrow +\infty$$

Alors,  $W^{ad}$  est non vide et, pour tout  $p$  de  $R^n$ ,



$$\tilde{H}(p) = \min_{v \in W^{ad}} \tilde{h}(p, v)$$

Démonstration:

Soit  $E = \{p \in \mathbb{R}^n, \exists v \in W^{ad}, \tilde{H}(p) = \tilde{h}(p, v)\}$ ,

$E$  étant éventuellement vide, par exemple si  $W^{ad}$  est vide.

Nous allons montrer que  $E$  est fermé et que son complémentaire est de mesure nulle, et donc que  $E = \mathbb{R}^n$

a)  $E$  est fermé

Si  $E$  est vide,  $E$  est fermé

Si  $E$  n'est pas vide, considérons une suite  $p_n$  de  $E$  convergeant vers  $p$  dans  $\mathbb{R}^n$ ,  $v_n$  dans  $W^{ad}$  tel que  $\tilde{H}(p_n) = \tilde{h}(p_n, v_n)$ .

Remarquons que les suites  $\tilde{f}(v_n)$  et  $\tilde{L}(v_n)$  sont bornées, puisque  $v_n(\theta)$  reste dans un compact  $K$  indépendant de  $\theta$  et de  $n$ .

Il existe donc une sous-suite  $(q)$  de  $(p_n)$ , à laquelle on associe une sous-suite  $w_n$  de  $v_n$ , telle que  $f(w_n)$  ait une limite  $\tilde{f}$  et  $L(w_n)$  ait une limite  $\tilde{L}$ , avec:

$$|\tilde{f}(w_n) - \tilde{f}| < 1/n$$

$$|\tilde{L}(w_n) - \tilde{L}| < 1/n$$

Nous allons construire à partir des  $w_n$  une fonction  $v$  dans  $W^{ad}$  telle que  $\tilde{f}(v) = \tilde{f}$ ,  $\tilde{L}(v) = \tilde{L}$  et  $\tilde{h}(p, v) = \tilde{H}(p)$ . Posons  $\tau_0 = 0$  et, pour  $n$  entier  $> 0$ , choisissons un réel  $\tau_n > 0$  (il en existe) tel que:

$$\tau_n \geq n!$$

$$\text{pour tout } \tau \geq \tau_n, \left| \frac{1}{\tau} \int_0^\tau f(w_n(\theta), \theta) d\theta - f(w_n) \right| < \frac{1}{n}$$

et définissons maintenant  $v$  par:

$$v(\theta) = w_n(\theta) \text{ si } \theta \in [\tau_n, \tau_{n+1}[$$

Visiblement  $v$  est localement intégrable à valeur presque partout dans  $W^{ad}$ , il

$\bar{f}$  et que  $L(V(.))$  est de moyenne  $\bar{L}$ .

Soit  $\tau \in [\tau_n, \tau_{n+1}[$  avec  $n \geq 1$ ; par exemple.

Nous avons:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} f(v(\theta), \theta) d\theta - \bar{f} = \\ & \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau n-1} f(v(\theta), \theta) d\theta \\ & + \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau n} f(w_{n-1}(\theta), \theta) d\theta - \frac{\tau n}{\tau} \bar{f} \\ & - \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau n-1} f(w_{n-1}(\theta), \theta) d\theta \\ & - \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau n} f(w_n(\theta), \theta) d\theta + \frac{\tau n}{\tau} \bar{f} \\ & + \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} f(w_n(\theta), \theta) d\theta - \bar{f}, \end{aligned}$$

Soit la somme de cinq termes (1 par ligne):  $T_1 + T_2 + T_3 + T_4 + T_5$

$|T_1|$  et  $|T_3|$  sont majorés par  $(\frac{n-1!}{n!}) \sup_{\substack{u \in K \\ \theta > 0}} |f(u, \theta)| = \frac{k}{n}$

$$|T_2| = \frac{\tau n}{\tau} \left| \frac{1}{\tau n} \int_0^{\tau n} f(w_{n-1}(\theta), \theta) d\theta - \bar{f} \right| \leq \frac{1}{n}$$

de même pour  $|T_4|$  et  $|T_5|$

$$\text{et donc } \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} f(v(\theta), \theta) d\theta \xrightarrow[\tau \rightarrow +\infty]{} \bar{f}$$

On procède de même avec  $\bar{L}$  et donc  $v \in W^{ad}$

$$\text{D'autre par } \bar{h}(q_n, w_n) = \bar{h}(q_n) = q_n' \bar{f}(w_n) + \bar{L}(w_n)$$

Or  $\bar{H}$  est visiblement continu et donc

$$q'_n \bar{f}(w_n) + \bar{L}(w_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \bar{H}(p)$$

D'autre part  $q'_n \bar{f}(w_n) + \bar{L}(w_n) \longrightarrow p' \bar{f} + \bar{L} = \bar{h}(p, v)$

et donc  $\bar{h}(p, v) = \bar{H}(p)$ ,  $p \in E$ .

b) La complémentaire de  $E$  est de mesure nulle

Vues les hypothèses faites, nous savons qu'il existe une application mesurable  $u$  de  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+$  dans  $U^{ad}$  telle que:

$$h(p, u, (p, \theta), \theta) = \min_{u \in U^{ad}} h(p, u, \theta)$$

avec  $u$  bornée sur tout  $B \times \mathbb{R}_+$ ,  $B$  domaine borné de  $\mathbb{R}^n$ .

$\bar{H}$  est donc localement lipschitz en  $p$ , et donc presque partout dérivable. Nous allons montrer qu'en  $p$  où  $\bar{H}$  est dérivable,  $f(u(p, \cdot), \cdot)$  admet une moyenne (en  $\theta$ ), et que cette moyenne vaut  $\partial H / \partial p$ .

Pour simplifier, posons  $F(p, \theta) = f(u(p, \theta), \theta)$ .

Commençons par remarquer que, pour tout  $\epsilon > 0$ ,  $\theta > 0$ ,  $p$  et  $q$  dans  $\mathbb{R}^n$ , on a:

$$(1) \quad \frac{H(p+\epsilon q, \theta) - H(p, \theta)}{\epsilon} \leq q' F(p, \theta)$$

$$(2) \quad q' F(p+\epsilon q, \theta) \leq \frac{H(p+\epsilon q, \theta) - H(p, \theta)}{\epsilon}$$

et donc

$$(3) \quad 0 \leq q^T F(p, \theta) - \frac{H(p+\epsilon q, \theta) - H(p, \theta)}{\epsilon} \leq q^T [F(p, \theta) - F(p+\epsilon q, \theta)]$$

$$(4) \quad q^T F(p+\epsilon q, \theta) \leq \frac{H(p, \theta) - H(p-\epsilon q, \theta)}{\epsilon}$$

$$(5) \quad q^T F(p+\epsilon q, \theta) \leq \frac{H(p+2\epsilon q, \theta) - H(p+\epsilon q, \theta)}{\epsilon}$$

d'où

$$\begin{aligned} (6) \quad 0 &\leq q' F(p+eq, \theta) \leq \frac{H(p+eq, \theta) - H(p, \theta)}{\epsilon} \\ &\leq \frac{H(p+eq, \theta) - H(p, \theta)}{\epsilon} + \frac{H(p+eq, \theta) - H(p, \theta)}{\epsilon} - \frac{2H(p+2eq, \theta) - H(p, \theta)}{\epsilon} \end{aligned}$$

Soit  $p$  un point où  $H$  est dérivable et  $q$  un élément (arbitraire) de  $\mathbb{R}^n$ .

L'ensemble des valeurs  $\frac{1}{\tau} \int_0^\tau q^T F(p, \theta) d\theta$ , pour  $\tau > 0$ , est relativement compact dans  $\mathbb{R}$ . Soit  $\tau_n$  une suite de réels  $> 0$ , convergant vers  $+\infty$  telle que  $\frac{1}{\tau_n} \int_0^{\tau_n} q^T F(p, \theta) d\theta$  ait une limite  $l \in \mathbb{R}$  quand  $n$  tend vers  $+\infty$ . Nous avons alors, pour tout  $\epsilon > 0$ :

$$\begin{aligned} (7) \quad 0 &\leq 1 - \frac{\bar{H}(p+eq) - \bar{H}(p)}{\epsilon} < \frac{\bar{H}(p) - \bar{H}(p-eq)}{\epsilon} + \frac{\bar{H}(p+eq) - \bar{H}(p)}{\epsilon} \\ &\quad - 2 \frac{\bar{H}(p+2eq) - \bar{H}(p)}{2\epsilon} \end{aligned}$$

En faisant tendre  $\epsilon$  vers 0 nous en déduisons:

$$(8) \quad 0 \leq 1 - q^T \frac{\partial \bar{H}}{\partial p} \leq q^T \frac{\partial \bar{H}}{\partial p} + q^T \frac{\partial \bar{H}}{\partial p} - 2 q^T \frac{\partial \bar{H}}{\partial p} = 0$$

$$\text{et donc } \frac{1}{\tau} \int_0^\tau q^T F(p, \theta) d\theta \xrightarrow{\tau \rightarrow +\infty} q^T \frac{\partial \bar{H}}{\partial p},$$

ceci pour tout  $q$  dans  $\mathbb{R}^n$  et donc:

$$\boxed{\frac{1}{\tau} \int_0^\tau F(p, \theta) d\theta \xrightarrow{\tau \rightarrow +\infty} \frac{\partial \bar{H}}{\partial p}(p)}$$

On en déduit aisément que:

$$\frac{1}{\tau} \int_0^\tau L(u(p, \theta), I) d\theta \xrightarrow{\tau \rightarrow +\infty} \bar{H}(p) - p^T \frac{\partial \bar{H}}{\partial p}(p)$$

et donc, pour presque tout  $p$  de  $\mathbb{R}^n$ ,  $u(p, \cdot) \in U^{\bar{H}}$

que  $E \in \mathbb{R}^n$  d'une part et que, d'autre part, pour tout  $p$  de  $\mathbb{R}^n$ , il existe un élément  $u$  de  $W^{ad}$  tel que  $h(p, u) = H(p)$ .

Comme visiblement pour tout  $v$  de  $W^{ad}$  on a  $h(p, v) \geq H(p)$ , on en déduit que, pour tout  $p$  de  $\mathbb{R}^n$ , il existe  $u \in W^{ad}$  tel que:

$$\tilde{h}(p, u) = \tilde{H}(p) = \min_{v \in W^{ad}} h(p, v)$$

Remarque: la concavité de  $H$  en  $p$  est essentielle. En effet, il suffit de considérer l'exemple suivant:

$$H(p, \theta) = \sin(p, \theta) \quad p \in \mathbb{R}, \theta > 0$$

Alors  $H$  admet une moyenne pour tout  $p$  et cette moyenne est nulle:

$$\tilde{H} = 0 \quad \text{et donc} \quad \frac{\partial \tilde{H}}{\partial p} = 0$$

$$\text{D'autre part} \quad \frac{\partial H}{\partial p} = \theta \cos(p, \theta)$$

$$\text{et donc} \quad \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \frac{\partial H}{\partial p}(p, \theta) d\theta = \frac{\tau}{2} \quad \text{si } p = 0$$

$$= \frac{1}{p} \sin(pr) + \frac{1}{2} \frac{1}{\tau} \cos(pr)$$

$$\text{si } p \neq 0$$

$$\text{et donc} \quad \frac{\partial H}{\partial p} \text{ n'a pas de moyenne.}$$

#### 5.4 - Corollaire

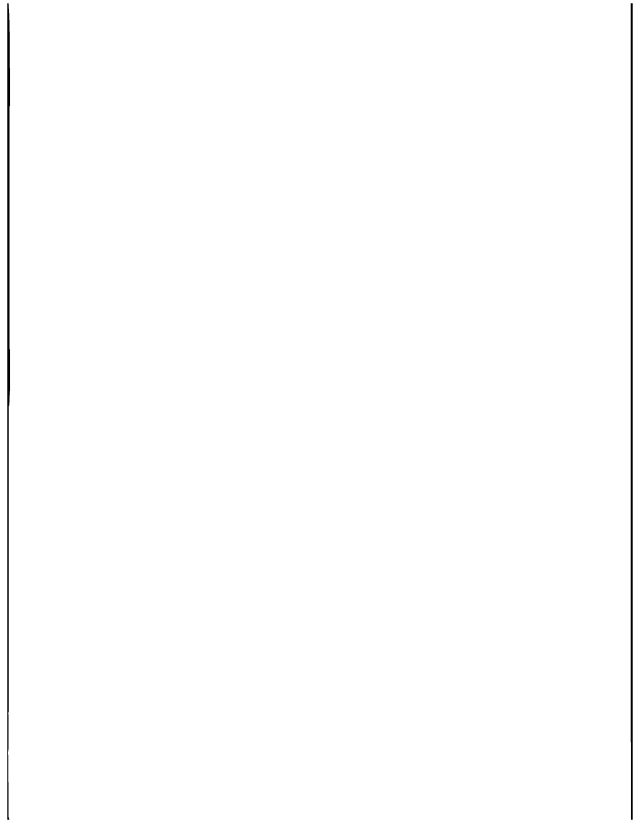
Sous les hypothèses du théorème (5.1) (pour tout  $x, t$ ), la fonction  $V$  du corollaire du théorème (5.1), solution de viscosité de:

$$\frac{\partial \bar{V}}{\partial t}(x, t) + \bar{H}\left(\frac{\partial \bar{V}}{\partial x}(x, t), x, t\right) = 0$$

$$\bar{V}(x, T) = 0$$

représente la fonction valeur du problème moyenné.

En particulier, si  $H$  vérifie les hypothèses  $(H_1)$  et  $(H_2)$  du théorème (4.1) (ou celle du § b de la remarque 4.8, laquelle remarque vaut évidemment pour le problème moyenné), alors la fonction valeur du problème  $(P^\epsilon)$  converge uniformément sur tout compact vers celle du problème moyenné.



## ANNEXE



The first part of the document discusses the importance of maintaining accurate records of all transactions. It emphasizes that proper record-keeping is essential for ensuring the integrity of the financial system and for providing a clear audit trail. The document also highlights the need for transparency and accountability in all financial dealings.

In the second part, the focus shifts to the role of the regulatory body in overseeing the financial system. It outlines the various responsibilities of the regulator, including monitoring market activity, enforcing rules, and providing guidance to market participants. The document stresses the importance of a strong and independent regulatory framework to ensure the stability and confidence of the financial system.

The third part of the document addresses the challenges faced by the financial system in the current environment. It discusses the impact of global economic conditions, technological advancements, and changing market dynamics. The document also identifies key areas for improvement and proposes strategies to address these challenges, such as enhancing risk management practices and improving the efficiency of the financial system.

Finally, the document concludes with a statement of commitment to the principles of transparency, accountability, and integrity. It expresses the confidence that the financial system is well-positioned to meet the challenges ahead and to continue to provide a stable and secure environment for all participants.

# ANNEXE

## Quelques propriétés de moyenne

### A.1 - Théorème principal

Soit  $\begin{cases} T > 0 \text{ et } f: [0, T] \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} \text{ bornée, continue,} \\ \varepsilon > 0 \end{cases} \quad (t, \theta) \longmapsto f(t, \theta)$

uniformément en  $t$ . On suppose qu'il existe  $\bar{f}$ , de  $[0, T]$  dans  $\mathbb{R}^n$ ,

vérifiant  $\sup_{\substack{\hat{t} > 0 \\ t \in [0, T]}} \left| \frac{1}{\hat{t}} \int_t^{\hat{t}+T} f(t, \theta) d\theta - \bar{f}(t) \right| \xrightarrow{T \rightarrow \infty} 0$

Soit  $A(T) = \sup_{T' > T} \sup_{\hat{t} > 0} \left| \frac{1}{\hat{t}} \int_t^{\hat{t}+T'} f(t, \theta) d\theta - \bar{f}(t) \right|$ , pour  $T > 0$  (\*)

Soit, pour  $\delta > 0$ ,  $m(\delta) = \sup_{\substack{t \in [0, T] \\ t' \in [0, T] \\ |t - t'| \leq \delta \\ \theta \in \mathbb{R}_+^n}} |f(t, \theta) - f(t', \theta)|$

et  $B(t, \varepsilon) = \inf_{D \in \mathbb{N}} \left\{ 2D \int_0^{\frac{t}{D}} m(s) ds + t A\left(\frac{t}{D\varepsilon}\right) \right\}$

Alors  $\sup_{t \in [0, T]} |B(t, \varepsilon)| \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0$

et  $\left| \int_s^t f(\tau, \frac{\tau}{\varepsilon}) d\tau - \int_s^t \bar{f}(\tau) d\tau \right| < B\left(\left|t-s\right|, \varepsilon\right)$

pour  $s$  et  $t$  dans  $[0, T]$ .

Démonstration: Supposons  $t > s$ .

Soit  $D$  entier  $> 0$  et  $t_k = \frac{k(t-s)}{D}$  pour  $k \in \{0, \dots, D\}$ .

(\*)  $A$  est décroissante, bornée par  $2 \|f\|_{\infty}$ ; on notera  $A(0) = \lim_{m \rightarrow \infty} A(m)$

On a visiblement  $\sup_{\substack{t \in [0, T] \\ t' \in [0, T] \\ |t-t'| \leq \delta}} |\bar{f}(t) - f(t)| < m(\delta)$

$$\begin{aligned} \text{donc} \quad & \left| \sum_{k=0}^{D-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} [f(\tau, \frac{\tau}{\epsilon}) - \bar{f}(\tau)] d\tau \right| \\ & \leq 2 \sum_{k=0}^{D-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} m(\tau - t_k) d\tau + \sum_{k=0}^{D-1} \left| \int_{t_k}^{t_{k+1}} [f(t_k, \frac{\tau}{\epsilon}) - \bar{f}(t_k)] d\tau \right| \\ & = 2D \int_0^{\frac{t-s}{D}} m(\tau) d\tau + \frac{t-s}{D} \sum_{k=0}^{D-1} \left| \int_{\frac{t_k}{\epsilon}}^{\frac{t_{k+1}}{\epsilon}} f(t_k, \theta) d\theta - \bar{f}(t_k) \right| \\ & \leq 2D \int_0^{\frac{t-s}{D}} m(\tau) d\tau + (t-s) A(\frac{t-s}{\epsilon D}), \end{aligned}$$

d'où l'estimation proposée ( $m$  est intégrable car croissante).

Reste à montrer la convergence uniforme de  $B$ . Soit  $\eta > 0$ . Pour :

$$t < \frac{\eta}{2m(T) + A(o)} ,$$

$$\text{alors } B(t, \epsilon) < 2m(T) \frac{\eta}{2m(T) + A(o)} + \frac{\eta}{2m(T) + A(o)} A(o) = \eta ,$$

pour tout  $\epsilon > 0$ .

Soit  $D$  tel que  $m(\frac{T}{D}) < \frac{\eta}{4T}$  (rappelons que  $m(s) \xrightarrow{s \rightarrow 0} 0$ )

$$\text{et } \epsilon_0 \text{ tel que } A(\frac{\eta}{D\epsilon_0(2m(T) + A(o))}) < \frac{\eta}{2T}$$

Alors, pour  $t \geq \frac{\eta}{2m(T) + A(o)}$ ,  $\epsilon \leq \epsilon_0$  ( $A$  est décroissante)

$$B(t, 2) < 2Tm(\frac{T}{D}) + T A(\frac{\eta}{D\epsilon_0(2m(T) + A(o))}) < \eta$$

D'où la limite.

Remarque:

Soit  $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}^n$  et  $\bar{f} \in \mathbb{R}^n$

Alors  $\sup_{t \geq 0} \left| \frac{1}{T} \int_t^{t+T} f(\tau) d\tau - \bar{f} \right| \xrightarrow{T \rightarrow +\infty} 0$

si et seulement si il existe une suite  $T_n$ ,  $T_n \longrightarrow +\infty$  avec

$$\sup_{t \geq 0} \left| \frac{1}{T_n} \int_t^{t+T_n} f(\tau) d\tau - \bar{f} \right| \xrightarrow{T_n \rightarrow +\infty} 0$$

En effet, soit  $T_n$  un élément quelconque de la suite et  $k$  le quotient de la division euclidienne de  $T$  par  $T_n$ , et  $\rho$  le reste.

$$\begin{aligned} \text{Alors } \left| \frac{1}{T} \int_t^{t+T} f(\tau) d\tau - \bar{f} \right| &< \frac{T_n}{T} \sum_{j=0}^{k-1} \left| \frac{1}{T_n} \int_{t+jT_n}^{t+(j+1)T_n} f(\tau) d\tau - \bar{f} \right| \\ &+ 2 \frac{\rho}{T} [ \|f\|_\infty + |\bar{f}| ] \\ &\leq k \frac{T_n}{T} \sup_{t \geq 0} \left| \frac{1}{T_n} \int_t^{t+T_n} f(\tau) d\tau - \bar{f} \right| + 2 \frac{T_n}{T} [ \|f\|_\infty + |\bar{f}| ] \end{aligned}$$

que l'on peut majorer par

$$\sup_{t \geq 0} \left| \frac{1}{T_n} \int_t^{t+T_n} f(\tau) d\tau - \bar{f} \right| + 2 \frac{T_n}{T} [ \|f\|_\infty + |\bar{f}| ]$$

ceci pour tout  $T_n$

Soit donc, pour  $\eta > 0$ ,  $T_n$  tel que

$$\sup_{t \geq 0} \left| \frac{1}{T_n} \int_t^{t+T_n} f(\tau) d\tau - \bar{f} \right| \leq \frac{\eta}{2}$$

$$\text{et } T \geq 4 \frac{T_n}{\eta} [ \|f\|_\infty + |\bar{f}| ]$$

Alors pour tout  $t > 0$  on a  $\left| \frac{1}{T} \int_t^{t+T} f(\tau) d\tau - \bar{f} \right| < \eta$ , d'où le résultat.

d'intégration est très forte

Nous supposons, dans toute la suite de l'annexe, toutes les fonctions périodiques en  $\theta$ , où  $\theta$  est la variable par rapport à laquelle on fait la moyenne, et de période  $\omega$ .

Commençons par analyser le théorème principal lorsque  $f$  est périodique, en utilisant le fait que la moyenne sur  $R_+$  (au sens précédent) est nécessairement celle sur une période (pour s'en convaincre, prendre  $T_n = n\omega$ )

## A.2 - Théorème principal, $f$ périodique

Soit  $f : [0, T] \times R_+ \longrightarrow R^n$  continue, périodique en  $\theta$  de  
 $(t, \theta) \longrightarrow f(t, \theta)$  période  $\omega$ .

Soit  $\epsilon > 0$ ,  $s$  et  $t$  dans  $[0, T]$

$$\text{Alors } \left| \int_0^t f(\tau, \frac{\tau}{\epsilon}) d\tau - \int_0^t \bar{f}(\tau) d\tau \right| < 2 \quad (Tm(\epsilon\omega) + \epsilon\omega \|f\|_\infty)$$

où  $m$  est définie comme dans le premier théorème.

En particulier, si  $f$  est Lipschitz en  $t$  de constante  $\lambda$ , alors

$$\left| \int_0^t f(\tau, \frac{\tau}{\epsilon}) d\tau - \int_0^t \bar{f}(\tau) d\tau \right| < 2 \quad \epsilon\omega(T\lambda + \|f\|_\infty)$$

### Démonstration

Soit  $D = E(\frac{|t-s|}{\epsilon\omega})$ , où  $E$  désigne la partie entière ; et

$$t_k = k \frac{t-s}{\epsilon\omega}$$

$$\text{Alors } \left| \int_0^t f(\tau, \frac{\tau}{\epsilon}) d\tau - \int_0^t \bar{f}(\tau) d\tau \right|$$

$$\leq \sum_{k=0}^{D-1} \left| \int_{t_k}^{t_{k+1}} f(\tau, \frac{\tau}{\epsilon}) d\tau - \int_{t_k}^{t_{k+1}} \bar{f}(\tau) d\tau \right| + 2 \quad \epsilon\omega \|f\|_\infty$$

$$\leq \sum_{k=0}^{D-1} \left| \int_{t_k}^{t_{k+1}} f(\tau, \frac{\tau}{\omega}) - f(t_k, \frac{\tau}{\omega}) \right| d\tau + \sum_{k=0}^{D-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \left| \bar{f}(\tau) - \bar{f}(t_k) \right| d\tau$$

$$\leq \sum_{k=0}^{D-1} \left| \int_{t_k}^{t_{k+1}} [f(\tau, \frac{\tau}{\omega}) - \bar{f}(t_k)] d\tau \right| + 2 \omega \|f\|_{\infty}$$

Le troisième terme étant nul, on peut majorer le tout par:

$$2 D \int_0^{\omega} m(s) ds + 2 \omega \|f\|_{\infty} \quad , \quad \text{qui est inférieur à}$$

$$2 \left( \left| t-s \right| \frac{1}{\omega} \int_0^{\omega} m(s) ds + \omega \|f\|_{\infty} \right)$$

$$\leq 2 \left( T m(\omega) + \omega \|f\|_{\infty} \right)$$

En particulier, si  $f$  est lipschitz en  $t$  de constante  $\lambda$ , on peut majorer l'expression par  $2\omega[T\lambda + \|f\|_{\infty}]$

notation: Nous poserons désormais, pour  $f$  application continue de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}^n$ , périodique de période  $\omega$ ,  $\bar{f}$  comme étant la primitive en  $\Theta$  de moyenne nulle de  $f$ .

Autrement dit,

$$\bar{f}(\Theta) = \int_0^{\Theta} f(\tau) d\tau - \Theta \bar{f} - \frac{1}{\omega} \int_0^{\omega} d\Theta \int_0^{\Theta} f(\tau) d\tau + \frac{\omega}{2} \bar{f}$$

Si  $f$  dépend d'autres arguments, notés globalement  $\sigma$ , alors nous poserons

$\bar{f}(\sigma, \cdot) = \bar{f}(\bar{f}_{\sigma})$ , où  $\bar{f}_{\sigma}$  est l'application partielle en  $\Theta$  au

point  $\sigma$ , et  $\bar{f}(\sigma, \cdot) = \bar{f}(\sigma)$

Remarquons que pour  $\Theta \in [0, \omega]$ ,

$$\left| \bar{f}(\Theta) \right| \leq \Theta \|f\|_{\infty} + \left| \frac{\omega}{2} - \Theta \right| \|f\|_{\infty} + \left[ \frac{1}{\omega} \int_0^{\omega} \Theta d\Theta \right] \|f\|_{\infty}$$

En particulier, si  $|f(\sigma, \theta) - f(\sigma', \theta)| \leq \lambda |\sigma - \sigma'| \forall \theta$ , alors

$$\begin{aligned} |\Pi(f(\sigma, .))(\theta) - \Pi(f(\sigma', .))(\theta)| &\leq \|\Pi(f(\sigma, .)) - \Pi(f(\sigma', .))\|_{\infty} \\ &\leq 2\omega \|f(\sigma, .) - f(\sigma', .)\| \leq 2\omega \lambda |\sigma - \sigma'| \end{aligned}$$

### A.3 - Développement d'intégrale au second ordre

Soit  $f : [0, T] \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ , périodique en  $\theta$  de période  $\omega$ ,  
 $(t, \theta) \longrightarrow f(t, \theta)$

continue, de classe  $C^1$  en  $t$ , de dérivée lipschitz en  $t$  de constante  $\lambda$ .

Alors, pour  $\varepsilon > 0$ , pour  $s$  et  $t$  dans  $[0, T]$

$$\begin{aligned} \left| \int_s^t f(\tau, \frac{\tau}{\varepsilon}) d\tau - \int_s^t \bar{f}(\tau) d\tau - \varepsilon \Pi(f(t, .))(\frac{t}{\varepsilon}) + \varepsilon \Pi(f(s, .))(\frac{s}{\varepsilon}) \right| \\ \leq 4 \varepsilon^2 \omega^2 [T \lambda + \|f\|_{\infty}] \end{aligned}$$

### Démonstration

$$\frac{d}{d\tau} (\varepsilon \Pi(f(\tau, .))(\frac{\tau}{\varepsilon})) =$$

$$\varepsilon \Pi \left( \frac{\partial f}{\partial t}(\tau, .) \right) (\frac{\tau}{\varepsilon}) + f(\tau, \frac{\tau}{\varepsilon}) - \bar{f}(\tau)$$

$$\text{Donc} \quad \int_s^t f(\tau, \frac{\tau}{\varepsilon}) d\tau - \int_s^t \bar{f}(\tau) d\tau - \varepsilon \Pi(f(t, .))(\frac{t}{\varepsilon})$$

$$+ \varepsilon \Pi(f(s, .))(\frac{s}{\varepsilon}) = - \varepsilon \int_s^t \Pi \left( \frac{\partial f}{\partial t}(\tau, .) \right) (\frac{\tau}{\varepsilon}) d\tau$$

Or, d'après ce qui précède,

$$\left| \int_s^t \Pi \left( \frac{\partial f}{\partial t}(\tau, .) \right) (\frac{\tau}{\varepsilon}) d\tau \right| \leq 2\varepsilon \omega [T (2\omega \lambda) + 2\omega \|f\|_{\infty}]$$

#### A.4 - Développement d'équations différentielles

##### Premier ordre

$$\text{Soit } f : \mathbb{R}^n \times [0, T] \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n \\ (x, t, \theta) \longrightarrow f(x, t, \theta)$$

$f$  continue, Lipschitz en  $x$  et  $t$  de constante  $\lambda$ , périodique en  $\theta$

période en  $\theta$  de période  $\omega$ . Soit  $x^\varepsilon$  et  $y$  deux applications absolument continues de  $[0, T]$  dans  $\mathbb{R}^n$ , que l'on suppose vérifiant:

$$(1) \quad \frac{dx^\varepsilon}{dt} = f(x(t), t, \frac{t}{\varepsilon}) \quad \text{ppt } \varepsilon \in [0, T], \quad x(0) = x_0$$

$$(2) \quad \frac{dy}{dt} = \bar{f}(y(t), t) \quad \text{ppt } \varepsilon \in [0, T], \quad y(0) = x_0$$

Alors

$$\sup_{t \in [0, T]} |x^\varepsilon(t) - y(t)| < 2 \omega e^{\lambda T} \{ T\lambda(1 + \|f(y)\|_\infty) + \|f(y)\|_\infty \}$$

$$\text{où } \|f(y)\|_\infty = \sup_{t \in [0, T], \theta \in \mathbb{R}} |f(y(t), t, \theta)|$$

Preuve:

$$\begin{aligned} |x(t) - y(t)| &= \left| \int_0^t [f(x(s), s, \frac{s}{\varepsilon}) - \bar{f}(y(s), s)] ds \right| \\ &\leq \lambda \int_0^t |x(s) - y(s)| ds + \left| \int_0^t [f(y(s), s, \frac{s}{\varepsilon}) - \bar{f}(y(s), s)] ds \right| \end{aligned}$$

Or le second terme peut être estimé à partir du théorème principal.

$$\text{On a : } |f(y(t), t, \theta) - f(y(t'), t', \theta)| \leq \lambda |t - t'| (1 + \|\frac{dy}{dt}\|_\infty)$$

$$\text{Posons donc } \|f(y)\|_\infty = \sup_{t \in [0, T], \theta \in \mathbb{R}} |f(y(t), t, \theta)|$$

$$\text{Alors } |x(t) - y(t)| \leq \lambda \int_0^t |x(s) - y(s)| ds + 2\omega \{ T\lambda(1 + \|f(y)\|_\infty) + \|f(y)\|_\infty \}$$



$$\text{donc } \|x(t) - y(t)\| < 2\omega(T\lambda(1 + \|f(y)\|_\infty) + \|f(y)\|_\infty) e^{\lambda T}$$

Second ordre

$$\begin{aligned} \text{Soit } f : \mathbb{R}^n \times [0, T] \times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ (x, t, \theta) &\longrightarrow f(x, t, \theta) \end{aligned}$$

continue, périodique en  $\theta$  de période  $\omega$ , de classe  $C^1$  en  $x$  et  $t$  ;

$\frac{\partial f}{\partial x}$  est bornée et lipschitz en  $x$  de constante 1

On suppose qu'il existe  $x^e$  et  $y$  définies comme dans le développement au premier ordre, et on pose  $x_2(t) = \Pi(f(y(t), t, \cdot))$  et on note

$x_2(t)(\theta) = x_2(t, \theta)$ . On définit  $x_1$ , application de  $[0, T]$  dans  $\mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned} \text{par : } \quad \frac{dx_1}{dt} &= \frac{\partial f}{\partial x}(y(t), t) x_1 + \frac{\partial f}{\partial x}(y(t), t, \cdot) x_2(t, \cdot) \\ x_1(0) + x_2(0, 0) &= 0 \end{aligned}$$

$$\text{Soit } \mu(y) = \sup_{t \in [0, T]} \sup_{\theta \in \mathbb{R}} \left[ \left| \frac{\partial f}{\partial x}(y(t), t, \theta) \right|, \left| \frac{\partial f}{\partial t}(y(t), t, \theta) \right|, \left| f(y(t), t, \theta) \right| \right]$$

$$v(y) = 2\mu(y)[1 + 4\mu(y)e^{T\mu(y)}], \quad c(y) = 4\mu(y)e^{T\mu(y)}$$

On suppose que  $\frac{\partial f}{\partial x}(y(t), t, \theta)$ ,  $\frac{\partial f}{\partial t}(y(t), t, \theta)$ ,  $f(y(t), t, \theta)$  sont Lipschitz

en  $t$  de constante  $\lambda(y)$  [ce qui est déjà vrai pour  $f(y(t), t, \theta)$ ].

$$\text{Soit } \Lambda(y) = 2\lambda(y) + 4\lambda(y)\mu(y)[2e^{T\mu(y)} - 1] + 8\mu(y)^3 e^{T\mu(y)} + 8\lambda(y)\mu(y)^2,$$

$$\text{et } k(y) = T\Lambda(y) + v(y)$$

Alors

$$\sup_{t \in [0, T]} \|x^e(t) - y(t) - (x_1(t) + x_2(t, \frac{t}{\omega}))\| \leq e^{2\omega^2(1c^2(y) + k(y))} e^{\| \frac{\partial f}{\partial x} \|_\infty T}$$

Preuve

Soit  $P(t) = y(t) + \varepsilon(x_2(t, \frac{t}{\varepsilon}) + x_1(t))$

alors  $\frac{dP}{dt} = \bar{f}(y(t), t) + \varepsilon \Pi(\frac{\partial \bar{f}}{\partial x}(y(t), t, \cdot))(\frac{t}{\varepsilon}) \bar{f}(y(t), t)$

$+ \varepsilon \Pi(\frac{\partial \bar{f}}{\partial t}(y(t), t, \cdot))(\frac{t}{\varepsilon}) + f(y(t), t, \frac{t}{\varepsilon}) - \bar{f}(y(t), t)$

$+ \varepsilon \frac{\partial \bar{f}}{\partial x}(y(t), t) x_1(t) + \varepsilon \frac{\partial \bar{f}}{\partial x}(y(t), t, \cdot) \Pi(f(y(t), t, \cdot))$

$= f(y(t), t, \frac{t}{\varepsilon}) + \frac{\partial \bar{f}}{\partial x}(y(t), t, \frac{t}{\varepsilon})(P(t) - y(t)) + \varepsilon S(y(t), t, \frac{t}{\varepsilon})$

où  $S(z, t, \Theta) = \Pi(\frac{\partial \bar{f}}{\partial t}(z, t, \cdot))(\Theta) + \{\frac{\partial \bar{f}}{\partial x}(z, t) - \frac{\partial \bar{f}}{\partial x}(z, t, \Theta)\} x_1(t)$

$+ \frac{\partial \bar{f}}{\partial x}(z, t, \cdot) \Pi(f(z, t, \cdot)) - \frac{\partial \bar{f}}{\partial x}(z, t, \Theta) \Pi(f(z, t, \cdot))(\Theta).$

$S(y(t), t, \Theta)$  est continue, périodique, de moyenne nulle et Lipschitz en  $t$ . Estimations sur  $S$ :

Soit  $\mu(y) = \sup_{t \in [0, T]} \sup_{\Theta \in \mathbb{R}} \left| \frac{\partial \bar{f}}{\partial t}(y(t), t, \Theta) \right|, \left| \frac{\partial \bar{f}}{\partial x}(y(t), t, \Theta) \right|, \left| f(y(t), t, \Theta) \right|$

Alors  $\frac{d|x_1|}{dt} < \mu(y) |x_1| + 2\omega \mu(y)^2, \quad |x_1(0)| < 2\omega \mu(y)$

donc  $\|x_1\|_{\infty} \leq 2\omega \mu(y) [2e^{T\mu(y)} - 1]$  et donc :

$|S(y(t), t, \Theta)| \leq 2\omega \mu(y) + 4\omega \mu(y)^2 [2e^{T\mu(y)} - 1] + 4\omega \mu(y)^2$   
 $= 2\omega \mu(y) [1 + 4\mu(y)e^{T\mu(y)}] = \omega \nu(y)$

et  $|S(y(t), t, \Theta) - S(y(t'), t', \Theta)|$

$< |t - t'| \{7\omega \lambda(y) + 4 \lambda(y)\omega \mu(y) [2e^{T\mu(y)} - 1] + 8 \omega \mu(y)^3 e^{T\mu(y)}\}$   
 $+ 8 \omega \lambda(y) \mu(y)^2\} = |t - t'| \Lambda(y) \omega$

D'après le théorème principal, on a donc :

$\left| \int_{\tau}^t S(y(\tau), \tau, \frac{\tau}{\varepsilon}) d\tau \right| < 2\varepsilon \omega^2 \{T \Lambda(y) + \nu(y)\} = \varepsilon \omega^2 k(y)$

On a donc :

$$\begin{aligned}
 |x(t) - P(t)| &< \left| \int_0^t [f(x(s), s, \frac{s}{\epsilon}) - f(y(s), s, \frac{s}{\epsilon}) \right. \\
 &\quad \left. - \frac{\partial f}{\partial x}(y(s), s, \frac{s}{\epsilon})(P(s) - y(s))] ds \right| + \epsilon^2 \omega^2 k(y) \\
 &\leq \|\frac{\partial f}{\partial x}\|_{\infty} \int_0^t |x(s) - P(s)| ds + \int_0^t \left| f(P(s), s, \frac{s}{\epsilon}) - f(y(s), s, \frac{s}{\epsilon}) - \right. \\
 &\quad \left. - \frac{\partial f}{\partial x}(y(s), s, \frac{s}{\epsilon})(P(s) - y(s)) \right| ds + \epsilon^2 \omega^2 k(y) \\
 \text{Or } \left| f(P(s), s, \frac{s}{\epsilon}) - f(y(s), s, \frac{s}{\epsilon}) - \frac{\partial f}{\partial x}(y(s), s, \frac{s}{\epsilon})(P(s) - y(s)) \right| \\
 &< 1 |P(s) - y(s)|^2 \\
 &< 1 \left\{ \epsilon \omega [4\mu(y) e^{T\mu(y)} - 2\mu(y) + 2\mu(y)] \right\}^2 = 1 \epsilon^2 \omega^2 c^2(y) \\
 \text{donc } |x(t) - P(t)| &< \epsilon^2 \omega^2 [1c^2(y) + k(y)] e^{\|\frac{\partial f}{\partial x}\|_{\infty} t}.
 \end{aligned}$$

# BIBLIOGRAPHIE

- [1] V. ARNOLD "Equations différentielles ordinaires", Editions Mir, 1974.
- [2] A. BENSOUSSAN "Singular Perturbations in Systems and Control" Mark Ardema, ed., Springer-Verlag, 1983, pp 169-185
- [3] A. BENSOUSSAN, J.L. LIONS, G. PAPONICOLAOU "Asymptotic Analysis for Periodic Structures", Studies in Mathematics and its Applications, North-Holland, 1978.
- [4] H. BREZIS "Analyse fonctionnelle, Théorie et applications" Masson, 1983.
- [5] F. DELEBECQUE, J.P. QUADRAT "Utilisation d'un théorème de mélange pour le découplage gestion court terme, long terme et contrôle stochastique et application à la gestion de réservoirs" Annales des Sciences Mathématiques du Québec, 1977, Vol.2, pp 195-205.
- [6] A. FRIEDMAN "Partial Differential Equations of Parabolic Type". Prentice-Hall, 1964.
- [7] O. LADYZHENSKAYA, V. SOLONNIKOV, N. URAL'TSENA "Linear and Quasi-linear Equations of Parabolic Type, Amer. Math. Soc., 1968.
- [8] Y. LENOIR, LU RONG GUO "Commande Optimale des chauffages solaires avec appoint indépendant", Rapport à DETN - Gaz de France, CAI-ENSMP, 1982.
- [9] P.L. LIONS "Generalized Solutions of Hamilton Jacobi-Equations" Pitman, 1982.